

# Mécanique

pour la préparation à l'agrégation de chimie

Jules FILLETTE  
jules.fillette@phys.ens.fr

24 septembre 2021

Ce TD/Cours comporte sept sections. Toutes seront abordées en classe sauf peut-être la section 6 qui sera de toute façon abordée en électricité. Elles sont composées d'un rappel de cours comportant l'essentiel de ce qu'il faut savoir, d'exercices d'illustration portant sur des points spécifiques, et d'autres, placés en fin de chapitre, plus transverses. Certains exercices seront faits et corrigés en classe, d'autres vous seront laissés pour l'entraînement. La correction est systématiquement distribuée en fin de chapitre. Parfois, le chapitre se termine par une ouverture, au-delà du programme de physique du concours, mais intéressante pour la culture.

## Quelques repères historiques

- Archimède (III<sup>e</sup> s. av. JC) donne une description géométrique de la mécanique. Il parle déjà de centre de gravité, comprend l'intérêt du bras de levier, et fonde l'hydrostatique. Il n'est pas encore question de mouvement mais il est le premier à s'intéresser à l'agencement des corps au repos.
- D'Aristote au moyen-âge le mouvement est transmis par contact avec un « premier moteur ». L'évolution du corps par la suite suit pour objectif d'atteindre son « lieu propre » où il trouvera l'immobilité.
- De Vinci, puis Galilée au XV<sup>e</sup>/XVI<sup>e</sup> siècle étudient la chute des corps le long de plans inclinés et donnent l'idée de dynamique : concept d'accélération, principe d'inertie, ... Par la suite, les observations et relevés de plus en plus précis d'astronomes comme Tycho Brahe permettent à Kepler de déduire bientôt (1609 & 1618) les trois lois qui portent aujourd'hui son nom.
- Celles-ci sont expliquées de manière convaincantes en 1687 dans les *Principia* de Newton. Même s'ils fondent la mécanique (lois de Newton), le raisonnement est encore très géométrique. Il faudra attendre la formalisation par Euler, Lagrange et d'Alembert au siècle suivant pour voir apparaître les équations de la mécanique telles qu'on les connaît.
- Au XIX<sup>e</sup> siècle, confrontée à des mouvements de vitesse de plus en plus grande, et à la théorie électromagnétique de Maxwell qui s'impose progressivement, la mécanique connaît une crise qui mènera Einstein à la théorie de la relativité restreinte d'abord, puis générale.

## La mécanique à l'agrégation de chimie

### La mécanique en composition de physique

- 2021** Exercice sur un oscillateur amorti par frottement fluide. Équation du mouvement et portrait de phase. Décroissement logarithmique. Analogie entre mécanique et électrostatique. Champ créé par une sphère massive. Définition : référentiel, lois de Newton, énergies cinétique et potentielle, système conservatif.
- 2020** Modèle mécanique de sismomètre. Réponse à une vibration du sol.
- 2018** Un oscillateur un peu bizarre pour récupérer l'énergie de la marche au niveau des hanches.
- 2017** Pendule simple. Équation du mouvement. Poulie. Hypothèse de non glissement. Équation du mouvement. Mouvement d'une bille dans un fluide visqueux. Oscillateur vertical entretenu.
- 2016** Modélisation de la molécule HCl par un système masse ressort.

### La mécanique en leçon de physique

- Aspects énergétiques de phénomènes physiques (Lycée)
- L'énergie, conversion et transferts (Lycée)
- Gravitation et poids (Lycée)
- Mouvement, interactions et notion de champ (Lycée)
- Conservation de l'énergie (CPGE)
- Oscillations (CPGE)
- Régimes transitoires (CPGE)
- Filtrages (CPGE)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cinématique du point et des solides</b>	<b>7</b>
1.1	Cadre de l'étude menée . . . . .	7
1.2	Référentiel, repère, coordonnées . . . . .	7
1.2.1	Espace et temps en mécanique classique . . . . .	7
1.2.2	Référentiel . . . . .	8
1.2.3	Repère et coordonnées . . . . .	8
1.3	Description du mouvement d'un point matériel . . . . .	10
1.3.1	Objets de la description du mouvement . . . . .	10
1.3.2	Expressions dans les divers systèmes de coordonnées . . . . .	12
1.4	Mouvement d'un solide . . . . .	13
1.4.1	Définition . . . . .	13
1.4.2	Translation . . . . .	14
1.4.3	Rotation autour d'un axe fixe . . . . .	14
1.5	Exercices complémentaires . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Dynamique du point</b>	<b>17</b>
2.1	Objets de la dynamique, lois de Newton . . . . .	17
2.1.1	Quantité de mouvement . . . . .	17
2.1.2	Bilan des forces . . . . .	18
2.1.3	Première loi de Newton : principe d'inertie . . . . .	18
2.1.4	Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	18
2.1.5	Troisième loi de Newton : loi des actions réciproques . . . . .	19
2.2	Mise en applications avec quelques forces classiques . . . . .	19
2.2.1	Force d'attraction gravitationnelle, poids . . . . .	19
2.2.2	Force de rappel du ressort . . . . .	20
2.2.3	Poussée d'Archimède . . . . .	22
2.2.4	Frottements fluides . . . . .	22
2.2.5	Frottements solides, réaction du support . . . . .	23
2.2.6	Forces exercées sur une particule chargée . . . . .	24
2.3	Conclusion : les quatre interactions fondamentales . . . . .	25
2.4	Exercices complémentaires . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Aspects énergétiques</b>	<b>29</b>
3.1	Énergie développée par une force . . . . .	29
3.2	Énergies usuelles des systèmes mécaniques . . . . .	29
3.3	Théorèmes énergétiques . . . . .	31
3.3.1	Théorème de la puissance/l'énergie cinétique . . . . .	31
3.3.2	Théorème de l'énergie mécanique . . . . .	32
3.4	Équilibre et stabilité . . . . .	32
3.4.1	Notion d'équilibre mécanique . . . . .	32

3.4.2	Stabilité d'une position d'équilibre . . . . .	33
3.5	Exercices complémentaires . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Moment cinétique</b> . . . . .	<b>35</b>
4.1	Définitions . . . . .	35
4.1.1	Nécessité . . . . .	35
4.1.2	Moment cinétique d'un point matériel . . . . .	35
4.2	Théorème du moment cinétique . . . . .	35
4.2.1	Moment d'une force . . . . .	35
4.2.2	Théorème du moment cinétique . . . . .	36
4.3	Moment cinétique d'un solide, énergie de rotation . . . . .	36
4.3.1	Axe de rotation d'un solide . . . . .	36
4.3.2	Lien entre rotation et moment cinétique . . . . .	37
4.3.3	Énergie de rotation . . . . .	37
4.4	Exercices complémentaires . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Oscillateurs harmonique et amortis en régime libre</b> . . . . .	<b>41</b>
5.1	Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre . . . . .	41
5.1.1	Potentiel proche de l'équilibre . . . . .	41
5.1.2	Cas de l'équilibre instable . . . . .	41
5.2	Oscillateur harmonique . . . . .	42
5.2.1	Équation du mouvement . . . . .	42
5.2.2	Équations horaires . . . . .	42
5.2.3	Persistance des oscillations dans le temps . . . . .	43
5.2.4	Isochronisme des oscillations . . . . .	43
5.2.5	Échange d'énergie potentielle et cinétique . . . . .	43
5.3	Oscillateurs amortis . . . . .	44
5.3.1	Modélisation du frottement . . . . .	44
5.3.2	Équations du mouvement . . . . .	44
5.3.3	Régimes d'évolution . . . . .	45
5.3.4	Oscillateur amorti par frottements solides . . . . .	46
5.4	Portrait de phase . . . . .	47
5.5	Exercices . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Oscillateurs en régime forcé - Résonance</b> . . . . .	<b>53</b>
6.1	Mise en équation . . . . .	53
6.2	Série de Fourier et méthode complexe . . . . .	54
6.2.1	Développement en série de Fourier . . . . .	54
6.2.2	La méthode complexe . . . . .	54
6.3	Intuition expérimentale . . . . .	55
6.4	Résonance en position . . . . .	55
6.4.1	Résolution complexe . . . . .	55
6.4.2	Diagramme de Bode . . . . .	56
6.5	Résonance en vitesse . . . . .	56
6.6	Exercice d'application . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Mouvement dans un champ de force central</b> . . . . .	<b>59</b>
7.1	Propriétés des forces centrales . . . . .	59
7.1.1	Définition . . . . .	59
7.1.2	Moment d'une force centrale, conséquences . . . . .	59
7.2	Forces centrales conservatives . . . . .	60



7.2.1	Conservation de l'énergie, énergie potentielle effective . . . . .	60
7.2.2	Diagramme d'énergie, trajectoires . . . . .	61
7.3	Forces centrales newtonienne . . . . .	62
7.3.1	Définition . . . . .	62
7.3.2	Diagramme énergétique . . . . .	62
7.4	Mouvements d'un point matériel dans un champ de force central newtonien . . . . .	63
7.4.1	Différents mouvements possibles . . . . .	63
7.4.2	Cas simple de la trajectoire circulaire . . . . .	64
7.4.3	Cas réaliste des trajectoires elliptiques . . . . .	65
7.5	Lois de Kepler . . . . .	66
7.6	Étude des états de diffusion . . . . .	66
7.7	Ouverture : Généralisation au problème à deux corps . . . . .	67
7.8	Exercices complémentaires . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Changement de référentiels</b> . . . . .	<b>71</b>
8.1	Changements de référentiel . . . . .	71
8.1.1	Situation d'étude . . . . .	71
8.1.2	Formule de dérivation vectorielle . . . . .	72
8.1.3	Cinématique – Transformations des vecteurs vitesse et accélération . . . . .	73
8.1.4	Deux cas particuliers incontournables . . . . .	74
8.2	Dynamique en référentiel non-galiléen . . . . .	75
8.2.1	Principe fondamental de la dynamique, pseudo-forces . . . . .	75
8.2.2	Théorème du moment cinétique . . . . .	76
8.2.3	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	76
8.2.4	Transformation de Galilée . . . . .	77
8.3	Quelques référentiels usuels . . . . .	77
8.4	Conséquences du mouvement de la Terre autour du soleil . . . . .	80
8.4.1	PFD dans le référentiel géocentrique . . . . .	80
8.4.2	Forces de marée dues à un astre . . . . .	81
8.4.3	Théorie statique des marées océaniques . . . . .	83
8.4.4	Galiléen ou non? . . . . .	86
8.5	Conséquences de la rotation de la Terre sur elle-même . . . . .	87
8.5.1	Principe fondamental dans $\mathcal{R}_G$ . . . . .	87
8.5.2	Terme inertiel, pesanteur . . . . .	88
8.5.3	Quelques effets classiques du terme de Coriolis . . . . .	89
8.6	Ouverture n°1 : Quelques éléments de relativité restreinte . . . . .	92
8.7	Ouverture n°2 : le référentiel barycentrique . . . . .	93
8.7.1	Théorèmes de König . . . . .	93
8.7.2	Lois de la dynamique dans le référentiel barycentrique . . . . .	95
8.8	Exercices complémentaires . . . . .	97



# Chapitre 1

## Cinématique du point et des solides

### 1.1 Cadre de l'étude menée

**Modèle du point matériel** La mécanique du point se base sur le modèle du point matériel. Celui-ci consiste à considérer qu'un corps peut être représenté par un unique point  $M$  (situé en son centre de masse, ou centre d'inertie<sup>1</sup>), lequel est affecté de toute la masse  $m$  du système.

Ce modèle présente bien sûr des limites : on ne pourra ainsi pas considérer la rotation propre d'un point matériel, alors que celle-ci peut avoir un effet notable sur la dynamique du corps (voir par exemple l'effet Magnus en mécanique des fluides).

**Limites** La mécanique classique est historiquement une des première branche de la physique moderne. En tant que telle, elle est limitée par différents aspects :

- elle ne s'intéresse qu'à des mouvements dont les vitesses typiques sont très inférieures à la vitesse de la lumière  $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Lorsque cette contrainte est levée, on entre dans le cadre de la *relativité*.
- elle ne considère pas d'effets quantiques, c'est-à-dire qu'elle est parfaitement déterministe : connaissant la position et la vitesse d'un point à un instant donné, et son équation du mouvement, on peut en théorie décrire toutes ses positions passées et futures.

#### Remarque

En réalité la vitesse de la lumière vaut  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette valeur est une valeur exacte, qui ne souffre aucune incertitude puisqu'elle a été fixée comme référence par le bureau international des poids et mesures. Faire l'arrondi à  $3.10^8$  engendre une erreur de moins de 0,1 %.

Cette valeur de  $c$  permet de définir l'unité MÈTRE : le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant  $1/299792458 \text{ s}$ .

### 1.2 Référentiel, repère, coordonnées

#### 1.2.1 Espace et temps en mécanique classique

La précédente définition du mètre permet de définir des longueurs dans l'espace sans ambiguïté.

La question du temps, elle, est plus fine, nous en reparlerons plus longuement en toute fin de cours dans l'introduction à la relativité. Disons simplement, pour le moment, qu'en mécanique classique le temps est absolu : c'est un paramètre de description de l'évolution des systèmes qui ne dépend pas de l'état de mouvement du référentiel choisi. On le mesure en SECONDE : la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

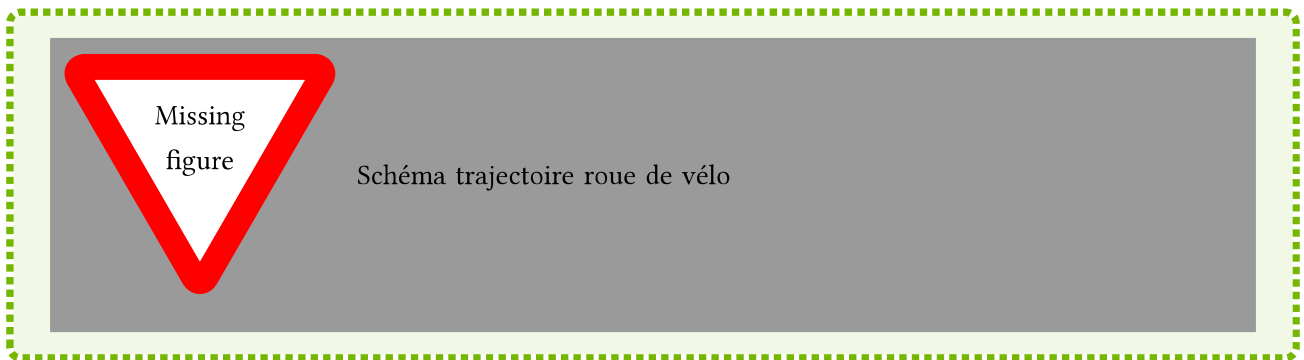
---

1. On verra que les deux coïncident lorsque le champ de pesanteur est uniforme

### 1.2.2 Référentiel

Un RÉFÉRENTIEL est un ensemble continu d'observateurs immobiles les un par rapport aux autres, munis d'horloges synchronisées, qui peuvent s'accorder sur l'état de mouvement des points par rapport à eux. Ainsi, dans le référentiel terrestre, les êtres humains immobiles seront d'accord sur la description du mouvement d'une voiture, d'un avion, d'un éléphant qui court.

Il est important de noter que le mouvement d'un point  $M$  dépend du référentiel dans lequel on l'observe : les quantités cinématiques (et dynamiques) sont relatives. Prenons par exemple le mouvement d'une valve de roue de vélo dans le référentiel de la route, du cycliste ou de la roue elle-même :



On y reviendra au dernier chapitre mais il y a quelques référentiels à connaître, ceux que l'on utilise le plus souvent : référentiel du laboratoire, référentiel géocentrique, référentiel de Copernic, etc.

### 1.2.3 Repère et coordonnées

Une fois qu'on s'est donné un référentiel, il s'agit de décider comment on va repérer les coordonnées du point, c'est-à-dire de quelle manière on va décomposer le VECTEUR POSITION  $\overrightarrow{OM}$ ,  $O$  étant l'origine du repère. Afin d'atteindre n'importe quel point de l'espace il nous faut trois vecteurs non colinéaires. Par souci d'efficacité<sup>2</sup> on les prendra systématiquement *orthogonaux* et orientés *dans le sens direct* par la règle de la main droite. Par convention les vecteurs de base sont pris *unitaire*, c'est-à-dire de norme 1.

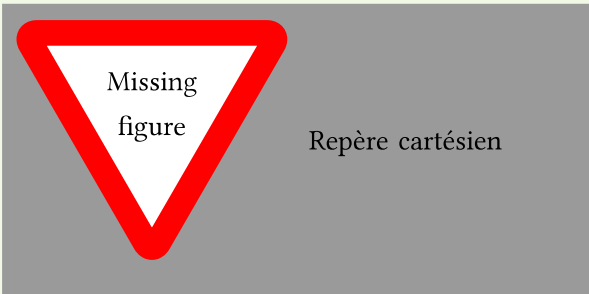
Divers choix sont possibles mais il faut impérativement connaître les quatre suivants. Il peut aussi être utile de connaître, ou au moins d'avoir compris, les déplacements infinitésimaux dans chaque système de coordonnées.

#### Remarque

Les vecteurs unitaires sont adimensionnés de sorte que chaque coordonnées d'un vecteur doit avoir la dimension du vecteur en question. Les coordonnées du vecteur position sont homogènes à une longueur, celles du vecteur vitesse à une vitesse, etc.

**Le repère cartésien** est un repère orthonormé direct formé de trois vecteur unitaires  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$  par rapport auquel on relève les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

2. Cela permettra notamment d'exprimer les opérations vectorielles sans trop de tracas.

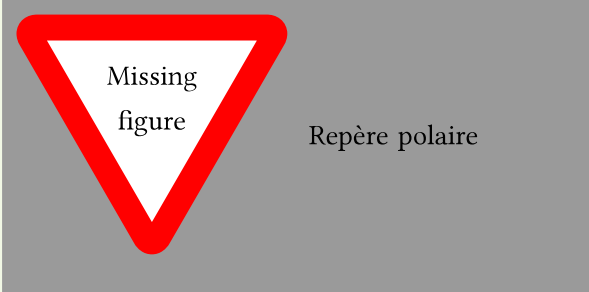


Missing figure

Repère cartésien

On a  $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ . Les vecteurs de base  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont fixes dans le référentiel lié.

**Le repère polaire** est un repère à *deux dimensions* permettant de repérer un point par sa distance à l'origine  $r$  et l'angle  $\theta$  avec un axe privilégié du repère. C'est l'équivalent du plan complexe.




Missing figure

Repère polaire

$r$  est une longueur et  $\theta$  un angle en rad. Ici  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  et les vecteurs de base  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  varient avec le mouvement du point  $M$ .

**Le repère cylindrique** est le repère polaire auquel on ajoute une direction cartésienne « verticale ». À  $r = OH$ , la distance entre l'origine et le projeté de  $M$  sur  $(xOy)$  et  $\theta$  angle orienté entre  $(Ox)$  et  $\overrightarrow{OH}$  on adjoint  $z$ , altitude du point  $M$ . On y associe les vecteurs de base  $\vec{e}_r$  radial,  $\vec{e}_\theta$  orthoradial et  $\vec{e}_z$  vertical.




Missing figure

Repère cylindrique

On a simplement  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ . Les vecteurs de base  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  varient encore avec le point  $M$  mais  $\vec{u}_z$ , lui, est un vecteur fixe.

**Le repère sphérique** est constitué d'une distance  $r$  et deux angles  $\varphi$  et  $\theta$ . Attention, le  $\varphi$  des coordonnées sphériques est le  $\theta$  des cylindriques ! Les vecteurs de base sont  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$ .



Missing figure

Repère sphérique

Les deux angles sont communément appelé, en référence à leur utilité sur la Terre, latitude ( $\varphi$ ) et longitude ( $\psi$ ). Les trois vecteurs de base sont en mouvement avec  $M$ .

### Remarque

Attention à ne pas confondre la notion de *référentiel* et celle de *repère*. Le référentiel est un objet abstrait ou concret qu'on considère immobile (« dans son référentiel ») et par rapport auquel on décrit les mouvements. Par exemple quand on décrit une expérience de table on considère que la Terre ne bouge pas et on décrit les mouvement par rapport à elle, « au sol ». Si on étudie le mouvement d'un satellite, comme la lune, il ne serait pas judicieux de considérer la Terre immobile mais sous certaines réserves on peut prendre pour référence le soleil et négliger son propre mouvement, etc.

Le choix du repère est un choix *technique*, un choix *d'outils* pour décrire le mouvement. Le choix du repère n'est pas influencé par le choix du référentiel : dans le référentiel du laboratoire on peut choisir de placer un repère cartésien si le mouvement est, par exemple, vertical, ou bien un repère polaire si c'est un mouvement circulaire qui sera plus simplement décrit par l'angle  $\theta$ .

L'un et l'autre choix sont une question de confort et se font (ou se feront, à la fin de ce TD-cours) assez naturellement.

## 1.3 Description du mouvement d'un point matériel

### 1.3.1 Objets de la description du mouvement

La **TRAJECTOIRE** d'un point matériel est la donnée des fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  (resp.  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ , etc.) qui donnent l'évolution des coordonnées au cours du temps. Ceci donne une description paramétrique du mouvement du point. En terme plus direct, c'est la donnée du vecteur position en tout instant :

**Vecteur position** Dans un référentiel donné, avec un point fixe  $O$ , le VECTEUR POSITION du point  $M$  est simplement le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . On le note également  $\vec{r}$  quand il n'y a pas d'ambiguïté. Les vecteurs de bases sont choisis pour permettre de l'exprimer simplement.

**Vecteur vitesse** Le VECTEUR VITESSE (instantanée) d'un point matériel est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. Il traduit un changement instantané de la position de l'objet :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}. \quad (1.1)$$

Il faut rapprocher cette notion de l'idée de vitesse (moyenne) : la vitesse moyenne d'un point entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  vaut en effet  $\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$ . La vitesse instantanée correspond donc logiquement au cas limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . C'est la définition d'une dérivée. Par construction, *le vecteur vitesse est donc tangent à la trajectoire*. Rappelons que dans le système international la vitesse s'exprime en mètres par seconde ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et non en kilomètre par heure ( $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ ).

**Vecteur accélération** Le VECTEUR ACCÉLÉRATION (instantanée) d'un point matériel est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, soit la dérivée seconde du vecteur position. Il traduit un changement instantané de la vitesse de l'objet et s'exprime en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}. \quad (1.2)$$

Le vecteur accélération est important en physique puisqu'il est directement lié aux actions des forces.

#### Remarque

Dans le langage courant, on a tendance à parler d'accélération lorsque la vitesse augmente et de freinage lorsqu'elle diminue. En physique toutes les variations du vecteur vitesse (pas seulement en norme, aussi en direction et en sens) sont décrits par le vecteur accélération  $\vec{a}$  dont une coordonnée sera positive ou négative selon que la vitesse augmente ou diminue selon cet axe.

#### Remarque

Je ne vous fais pas l'affront d'un aparté sur les conversions mais soyez au clair sur cette question!

#### Exercice n°1 : Vitesse et accélération le long d'une trajectoire

Soit un point mobile  $M$  dont la trajectoire dans un repère fixe orthonormé  $(Oxyz)$  est paramétrisée par :

$$x(t) = 4t^2, \quad y(t) = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right), \quad z(t) = 3t + t^3.$$

1. Déterminer le vecteur vitesse et sa norme.
2. Déterminer le vecteur accélération et sa norme.

#### Exercice n°2 : Ralentissement sur un cercle

Une particule se déplace sur un cercle de rayon  $R$ , à la vitesse angulaire  $\omega_0$  constante. À la date  $t = 0$ , elle ralentit avec une accélération angulaire constante égale à  $-\alpha_0 < 0$ .

1. Au bout de combien de temps la particule s'arrête-t-elle? Vérifier l'homogénéité du résultat.
2. Quelle distance a-t-elle alors parcouru?

### 1.3.2 Expressions dans les divers systèmes de coordonnées

L'expression de  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  se déduit donc directement de  $\overrightarrow{OM}$  par dérivation. En coordonnées cartésiennes le calcul est immédiat puisque les vecteurs de base sont fixes :  $d\vec{u}_x/dt = d\vec{u}_y/dt = d\vec{u}_z/dt = \vec{0}$ . Dans les autres systèmes de coordonnées c'est un peu plus compliqué et il faut dériver les vecteurs de base. Faisons le calcul une fois, à la main, pour voir :

Pour dériver le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  il faut se débarrasser des vecteurs mobiles en les projetant dans la base fixe. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r = r \cos(\theta)\vec{u}_x + r \sin(\theta)\vec{u}_y \\ \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta \vec{u}_x + r \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta) \vec{u}_x + \frac{dr}{dt} \sin \theta \vec{u}_y + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{u}_y \\ &= \underbrace{\dot{r} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)}_{\vec{u}_r} + \underbrace{r\dot{\theta} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y)}_{\vec{u}_\theta} \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.\end{aligned}$$



On s'aperçoit donc qu'en retenant les formules suivantes on peut obtenir vitesse et accélération de manière beaucoup plus efficace !

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r}. \quad (1.3)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r \\ \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

On pourra finalement s'entraîner à redémontrer en exercice, puis retenir, les expressions du tableau suivant.

	CARTÉSIENNES	CYLINDRIQUES	SPHÉRIQUES
$\overrightarrow{OM}$	$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$	$r\vec{e}_r$
$\vec{v}$	$\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
$\vec{a}$	$\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$	trop compliqué !
$d\overrightarrow{OM}$	$dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$	$dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$	$dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

#### Remarque

Pour le mouvement circulaire  $r$  ne varie pas et on a  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ , ce qui était attendu, et  $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ . Si de plus le mouvement est uniforme, c'est-à-dire à vitesse constante,  $\dot{\theta}$  est constant et on simplifie  $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ . L'accélération est alors orthogonale à la vitesse et centripète. On commence à sentir les prémices de la « force centrifuge ». Celle-ci interviendra dans le chapitre 8 sur les changements de référentiel, lorsqu'on cherchera à décrire le mouvement du point de vue d'un référentiel en rotation. Ici, on est toujours en train de décrire le mouvement depuis un référentiel galiléen.

#### Exercice n°3 : Accélération d'un pilote de chasse

Sachant qu'un pilote de chasse ne peut pas supporter une accélération de plus de 10g (10 fois l'accélération de la pesanteur), estimer la place qu'il lui faut pour effectuer un demi-tour lorsque sa vitesse vaut  $v_0 = 2500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

#### Exercice n°4 : Automobiliste dans un parking en colimaçon

On considère un parking dont la rampe d'accès est en colimaçon (rampe hélicoïdale). Un automobiliste la remonte avec une vitesse constante  $v_0 = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Déterminer la norme de son accélération.

Paramètres : rayon de l'hélice décrite par l'automobiliste  $R = 20 \text{ m}$ . Pas de l'hélice (= hauteur entre deux niveaux du parking)  $h = 3 \text{ m}$ .

## 1.4 Mouvement d'un solide

### 1.4.1 Définition

La limite du point matériel est bien sûr arbitraire. En réalité, tout corps possède une extension spatiale, et il peut être nécessaire de prendre celle-ci en compte pour expliquer certains mouvements particuliers, notamment

les rotations du système sur lui-même.

Cantonons-nous ici au modèle du solide indéformable, qui correspond au cas où les distances entre les points du solide sont invariantes au cours du temps :

$$\forall M_1, M_2 \in S, \forall t, t' : \|\overrightarrow{M_1 M_2}(t)\| = \|\overrightarrow{M_1 M_2}(t')\| \quad (1.4)$$

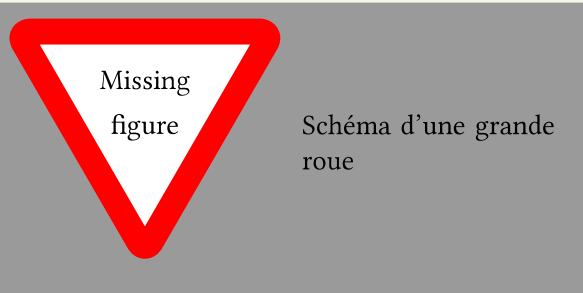
### 1.4.2 Translation

Un solide est animé d'un mouvement de translation lorsqu'un vecteur constitué de deux points du solide reste égal à lui-même au cours du temps. Autrement dit, si  $A_1$  et  $B_1$  sont deux points du solide (repérés dans le référentiel du laboratoire) à l'instant  $t_1$  qui se retrouvent en  $A_2$  et  $B_2$  à l'instant  $t_2$ , on doit avoir  $\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{A_2 B_2}$  pour parler d'un mouvement de translation. Cette formulation permet de comprendre une bonne fois pour toute que le mouvement de la terre autour du soleil est un mouvement de translation, mais que celui d'un enfant sur une balançoire n'en est pas un !

### 1.4.3 Rotation autour d'un axe fixe

On dit qu'un solide est en rotation autour d'un axe fixe s'il existe un axe de rotation  $\Delta$  immobile dans le référentiel du laboratoire.

Dès lors, soit  $M$  un point du solide et  $H$  son projeté orthogonal sur l'axe de rotation  $\Delta$ . On note  $R = HM$ . Dans un repère polaire local, on a  $\overrightarrow{HM} = R\vec{e}_r$  et donc  $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ . Cette dernière vitesse a du sens car l'axe de rotation est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, donc on calcule bien la vitesse par rapport à un point fixe.



La translation circulaire engendre des trajectoires qui sont des cercles de même rayon mais de centres différents. Au contraire, la rotation engendre des trajectoires qui sont des cercles tous centrés sur le même point mais de rayons différents.

## 1.5 Exercices complémentaires

Ces deux exercices nécessitent de connaître les équations du mouvement d'un chute libre (voir chapitre 2).

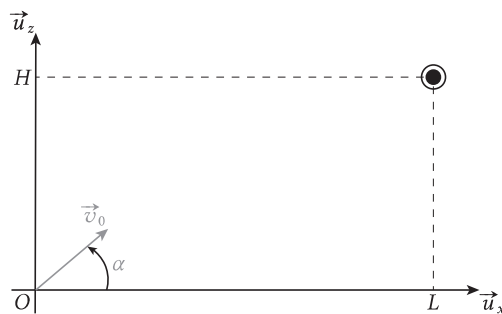
### Exercice n°5 : Chute d'un pot de fleur

De votre fenêtre, vous apercevez un pot de fleur qui tombe. Vous estimez qu'il met  $1/10$  de seconde pour passer devant la fenêtre haute de  $1,40$  m. Quelle vitesse possède le pot de fleur en bas de la fenêtre ? De quel étage est-il tombé ? Idem si le temps est de  $5/100$  de seconde.

N.B. : le pot tombe sans vitesse initiale, et on peut supposer que vous habitez au rez-de-chaussée.

### Exercice n°6 : Rendez-vous d'un projectile et d'une cible en mouvement

Une cible  $C$  est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur  $H$ . Au même moment, un projectile  $P$  est tiré avec une vitesse initiale  $v_0$  depuis une distance au sol  $L$  (voir schéma).



1. Déterminer les équations horaires du mouvement du projectile et de celui de la cible.
2. Quel doit être l'angle de tir  $\alpha$  pour que le projectile atteigne la cible en  $x = L$  ?
3. À quelle condition sur  $v_0$  cela est-il possible ?

A.N. :  $H = 10$  m et  $L = 150$  m.



## Chapitre 2

# Dynamique du point

La description du mouvement est un point de départ important et ne doit pas être négligé : une situation bien décrite est une situation déjà quasiment comprise ! Mais bien sûr cette étape ne suffit pas. On veut être capable de faire le lien entre le mouvement futur du point  $M$  et les actions qui s'exercent sur lui.

### 2.1 Objets de la dynamique, lois de Newton

#### 2.1.1 Quantité de mouvement

L'expérience commune montre que pour changer l'état de mouvement d'un corps, il y a deux paramètres à prendre en compte<sup>1</sup> :

- la vitesse du corps : il est plus difficile d'arrêter un corps qui va vite qu'un corps qui va lentement, et réciproquement il est plus simple de conférer une petite vitesse à un corps.
- la masse du corps : faire bouger une machine à laver est plus difficile que déplacer une feuille de papier à la même vitesse.

Conscients de ces observations, nous définissons le vecteur QUANTITÉ DE MOUVEMENT d'un point matériel comme le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\boxed{\vec{p}(M) = m \vec{v}(M)}. \quad (2.1)$$

La quantité de mouvement est donc homogène à  $M \times LT^{-1}$ , et s'exprime dans le SI en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Que se passe-t-il dans le cas d'un système de points matériels ?

$$\begin{aligned} \vec{p}_\Sigma &= \sum_{i \in \Sigma} m_i \vec{v}_i = \sum_{i \in \Sigma} m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}, \\ \text{or } G \text{ centre d'inertie} &\Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i \in \Sigma} \vec{OM}_i \quad \text{avec} \quad m = \sum_i m_i \\ \text{i.e.} \quad \frac{d\vec{OG}}{dt} &= \frac{1}{m} \sum_{i \in \Sigma} m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}, \\ \text{d'où} \quad \vec{p}_\Sigma &= m \vec{v}_G. \end{aligned}$$

On voit donc que la quantité de mouvement d'un système de points matériels est celle d'un point fictif matériel de masse  $M = \sum m_i$  situé au centre de gravité (d'inertie) du système. Ceci permet de justifier l'utilité du modèle du point matériel.

1. Ces considérations s'entendent bien sûr sans frottements.

### 2.1.2 Bilan des forces

Pour anticiper le mouvement d'un point matériel  $M$  il faut commencer par dresser la liste des actions exercées sur le corps. Elles sont modélisées par la notion de force. Une FORCE est un vecteur et est donc caractérisée par son point d'application, sa direction, son sens et sa norme. Celle-ci s'exprime en Newton, N, homogène à  $MLT^{-2}$ .

Idéalement on veut pouvoir connaître pour chaque action ces quatre caractéristiques mais nous allons voir que ce n'est pas toujours simple. Une fois la liste des actions dressée, on fait le lien avec le mouvement grâce aux trois lois de Newton.

### 2.1.3 Première loi de Newton : principe d'inertie

La PREMIÈRE LOI DE NEWTON, également appelée PRINCIPE D'INERTIE, stipule que :

« Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système pseudo-isolé est constante. »

Un SYSTÈME PSEUDO-ISOLÉ est un système sur lequel s'exercent des forces dont la résultante est nulle :  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Bien entendu, un SYSTÈME ISOLÉ, sur lequel ne s'exercent pas de force du tout, est un système pseudo-isolé.

#### Remarque

La question du référentiel galiléen est épistémologiquement compliquée. En effet, un référentiel galiléen est un référentiel où le principe d'inertie est vérifié... L'astuce habituelle (qui ne résout pas vraiment le problème) consiste à postuler l'existence d'un référentiel galiléen. Dès lors, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-ci est également galiléen. Nous aurons l'occasion d'en rediscuter au tout dernier chapitre.

#### Remarque

Il convient également de noter l'importance historique du principe d'inertie. Jusqu'à Newton, la physique bâtie par les grecs supposait qu'un corps sur lequel aucune force ne s'applique est nécessairement au repos. En réalité, Newton nous explique qu'il peut également être en mouvement à vitesse constante.

### 2.1.4 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)

La seconde loi de Newton, aussi appelée PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE, et que l'on abrègera quasiment systématiquement « PFD » stipule que :

« Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces s'exerçant sur ce système. » Autrement dit,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (2.2)$$

Si le système étudié est fermé, donc de masse constante, on a  $d\vec{p}/dt = dm\vec{v}/dt = m d\vec{v}/dt$  donc on peut écrire le PFD sous sa forme plus connue (et qu'on retiendra) :

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}. \quad (2.3)$$

#### Remarque

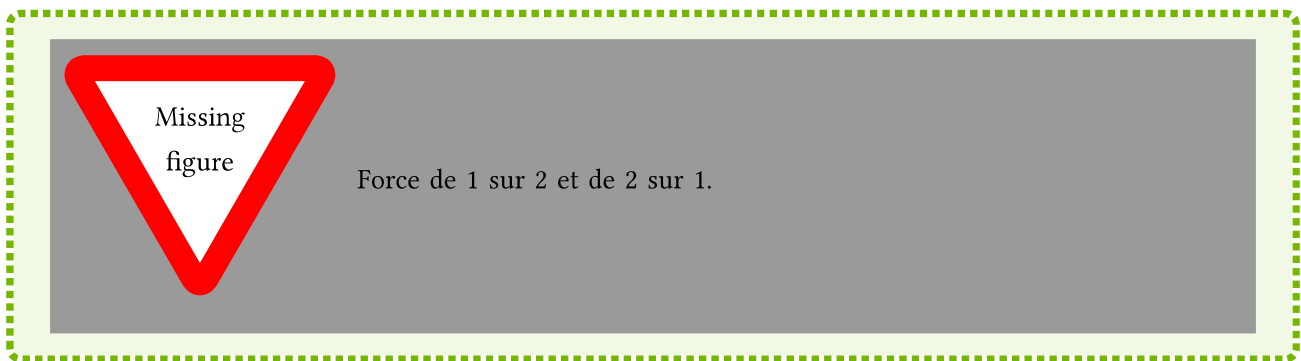
Lorsqu'on appliquera le pfd (très souvent!) on prendra bien soin de *systématiquement*

- vérifier et notifier qu'on travaille dans un référentiel galiléen (cela aura son importance au chapitre 8),
- expliciter le système fermé auquel on applique le principe,
- dresser un bilan des forces exhaustif.

### 2.1.5 Troisième loi de Newton : loi des actions réciproques

La troisième loi de Newton énonce que :

« Lorsque deux points matériels sont en interaction mutuelle, les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre sont de même norme et direction, mais de sens opposés. »



## 2.2 Mise en applications avec quelques forces classiques

### 2.2.1 Force d'attraction gravitationnelle, poids

En se basant sur les travaux de Kepler (qui base ses trois lois, dont nous discuterons au chapitre 7, sur les observations de Tycho Brahe), Newton formule dans les *Principia* (1687) la loi de l'attraction universelle, ou loi de la gravitation.

Entre deux corps (supposés ponctuels ici<sup>2</sup>)  $A$  et  $B$  de masses  $m_A$  et  $m_B$  s'exerce une force d'attraction gravitationnelle. La force de  $B$  sur  $A$  a pour direction la ligne joignant les centres de masse des deux corps, elle est attractive et a pour expression :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \mathcal{G} \frac{m_A m_B}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{u}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r.$$

La constante de gravitation vaut  $\mathcal{G} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

On peut aussi écrire cette force en faisant intervenir le CHAMP GRAVITATIONNEL  $\vec{G}(B)$  :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = m_B \times \vec{G}(B) \quad \text{avec} \quad \vec{G}(B) = -\mathcal{G} \frac{m_A}{r^2} \vec{u}_r.$$

Sur Terre, on peut se contenter d'une expression plus simple. En effet, les altitudes considérées sont toujours bien plus faibles que le rayon de la Terre, on peut donc faire l'approximation :

2. ou a minima à distribution sphérique de masse.

Avec le rayon de la Terre  $R_T = 6371$  km et sa masse  $M_T = 5,972 \cdot 10^{24}$  kg,  $h$  l'altitude d'un point au voisinage de la Terre :

$$\left\| \vec{G}_{\text{Terre}}(M) \right\| = \mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \approx \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (2.4)$$

L'attraction gravitationnelle au voisinage de la Terre est appelée POIDS (on raffinerait un peu cette notion au chapitre 8), elle est toujours verticale et dirigée vers le bas, de norme  $\vec{P} = m \vec{g}$  avec :

$$\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_z.$$

### Remarque

Lorsqu'on approxime  $g$  à  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  on fait une erreur de quelques 2 % qui peut parfois expliquer des différences entre prédiction théorique et observation expérimentale en TP !

### Exercice n°7 : Étude d'un lancé au voisinage de la Terre

On va considérer plusieurs mouvements d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  au voisinage de la terre. Dans tout cet exercice les frottements sont négligés et on travaille dans un référentiel  $\mathcal{R}$  lié au sol et supposé galiléen.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour obtenir l'équation du mouvement.
2. Dans un premier temps on suppose que  $M$  est lâché d'une hauteur  $h$  au dessus du sol sans vitesse initiale. Quelle est la durée de la chute libre ? Faire l'application numérique pour une chute libre de 1,5 m.

**Application à la balistique** On change de description et on considère un projectile lancé depuis le niveau du sol  $z = 0$ . Il est lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  de norme  $v_0$  et faisant avec l'horizontale un angle  $\alpha$ . Le mouvement a lieu dans le plan  $(O, x, z)$ .

3. Déterminer l'équation horaire du mouvement  $(x(t), z(t))$  puis l'équation paramétrique  $z(x)$ . Quelle courbe le projectile dessine-t-il ?
4. Calculer la FLÈCHE de la trajectoire, c'est à dire l'altitude  $H$  du plus haut point atteint. Commenter la dépendance de  $H$  avec  $\alpha$ .
5. Calculer la PORTÉE de la trajectoire, c'est à dire la distance  $x_p$  totale parcourue par le projectile au niveau du sol. Commenter la dépendance de  $x_p$  avec  $\alpha$ .
6. Représenter graphiquement quelques trajectoires du projectile en fonction de l'angle de visée  $\alpha$ .

### Remarque

En fait tout les calculs de cet exercice relève d'une seule hypothèse : l'accélération est constante tout au long du mouvement, ici égale à  $\vec{g}$ . On verra que ce sera le cas aussi d'autre mouvement, comme celui d'une particule chargée dans un champ électrique.

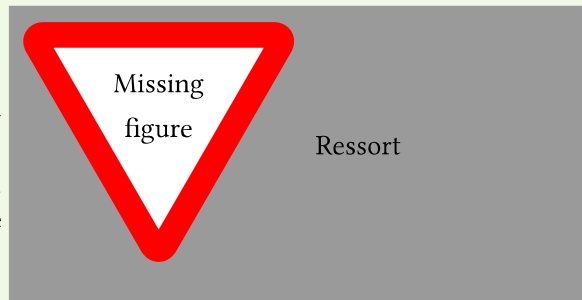
## 2.2.2 Force de rappel du ressort

Le ressort est un objet important en physique, non pas qu'il soit extrêmement intéressant en soi, mais il permet une modélisation simple, et relativement réaliste, d'un grand nombre de situations où les systèmes oscillent. Nous aurons l'occasion d'y revenir au chapitre 5. La force qu'un ressort exerce sur un point matériel  $M$  s'exprime ainsi :



$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$$

$k$  est la raideur du ressort en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $l_0$  est la longueur à vide ou longueur d'équilibre du ressort. Il n'y a pas à réfléchir pour écrire cette expression. Si le problème est bien posé schématiquement elle prend *toujours* cette forme!



Généralement on se débrouille pour étudier directement la coordonnée  $x = l - l_0$  qui représente l'écart à la position d'équilibre. Quoi qu'il en soit, on vérifiera toujours, sur l'expression finale de  $\vec{F}_{\text{ressort}}$  que

- si le ressort est comprimé ( $l < l_0$ ) il pousse le point  $M$ ,
- si le ressort est étendu ( $l > l_0$ ) il tire le point  $M$ .

### Exercice n°8 : Mouvements simples impliquant un ressort

On considère ici deux situations simples impliquant chacune un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Le système étudié est un point matériel de masse  $m$ .

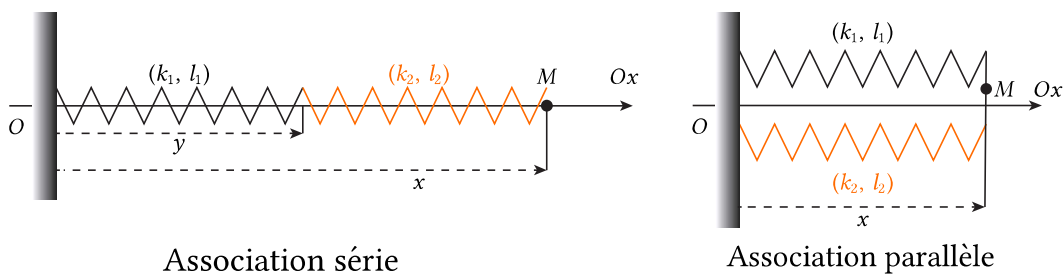
1. Dans un premier temps le ressort est suspendu au point  $O$ , fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, et marquant l'origine de l'axe  $z$  descendant. Le point matériel  $M$  est attaché à l'autre extrémité. Quelle est sa position d'équilibre ?
2. Dans cette seconde situation, l'ensemble est posé sur un plan horizontal et se déplace sans frottement. Le point  $M$  est initialement écarté de la position d'équilibre  $l_0$  d'une distance  $x_0$  et lâché sans vitesse initiale. Quelle est l'équation du mouvement ?

#### Remarque

L'équation du mouvement obtenue dans la deuxième situation est primordiale. Il s'agit de l'équation d'un OSCILLATEUR HARMONIQUE sur laquelle nous reviendrons largement (cf. chap 5).

### Exercice n°9 : Associations de ressorts et raideur équivalente

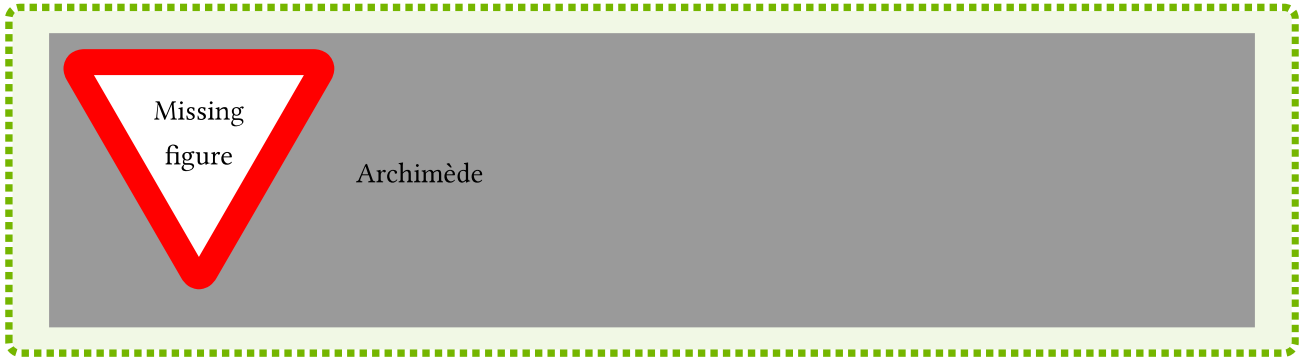
Dans cet exercice on associe deux ressorts et on se demande si l'ensemble peut être modélisé à son tour par un ressort unique de raideur  $k_{\text{eq}}$  et longueur à vide  $l_{\text{eq}}$ . Déterminer la raideur équivalente  $k_{\text{eq}}$  et la longueur équivalente  $l_{\text{eq}}$  lorsque les deux ressorts sont en série ou en parallèle (voir schéma). Les ressorts sont horizontaux.



### 2.2.3 Poussée d'Archimède

Le théorème d'Archimède affirme que : « Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée dirigée vers le haut et dont la norme est égale au poids du volume de fluide déplacé. »

Autrement dit, un corps dont un volume  $V_0$  est plongé dans un fluide de masse volumique  $\rho_f$  reçoit une poussée d'Archimède  $\vec{\Pi} = \rho_f V_0 g \vec{e}_z = -\rho_f V_0 \vec{g}$ .



#### Exercice n°10 : Influence négligeable de la poussée d'Archimède de l'air

On a démontré dans un exercice précédent que lorsqu'on lâche un mobile de masse  $M$  sans frottement d'une altitude  $h$  à la surface de la Terre il tombe au sol en une durée  $\tau = \sqrt{2h/g}$ . Comment se résultat est-il modifié si on tient compte de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le mobile de volume  $V$ ? [Attention on ne parle de frottements ici!]

#### Exercice n°11 : Équilibre d'un bouchon en liège à la surface de l'eau

Un bouchon cylindrique, de rayon  $r$  et hauteur  $h$ , est constitué de liège de masse volumique  $\rho_l$  et déposé à la surface de l'eau de masse volumique  $\rho_e$ . En supposant qu'il reste vertical, quelle hauteur du bouchon est immergée à l'équilibre?

### 2.2.4 Frottements fluides

La modélisation de la force de frottement fluide est complexe, et nous en reparlerons dans le cours de mécanique des fluides. Il existe essentiellement deux modèles :

- un modèle linéaire « à basse vitesse » :  $\vec{F}_{\text{fluide}} = -\lambda \vec{v}$ , où  $\lambda$  est une constante.
- un modèle quadratique « à haute vitesse » :  $\vec{F}_{\text{fluide}} = -\alpha \|\vec{v}\| \vec{v}$ , où  $\alpha$  est une constante.

Dans les deux cas, bien sûr, cette force de frottement qui *s'oppose au mouvement du point M*, est dans le sens opposé à la vitesse. La limite entre ces deux modélisations n'est pas tranchée, et la réalité expérimentale est souvent plus compliquée. On privilégiera souvent le premier modèle, qui a l'avantage d'être exploitable analytiquement. Dans tous les cas le modèle à choisir sera stipulé par l'énoncé (sinon, c'est qu'il faut prendre le modèle linéaire).

#### Exercice n°12 : Freinage d'une voiture par effet de l'air

Une voiture de masse  $m$ , roulant rectilignement à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ , coupe son moteur à  $t = 0$  et n'est plus soumise, suivant  $\vec{u}_x$ , qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse  $\vec{F} = -h \vec{v}$ .

1. Écrire la loi de variation de  $v$  en fonction du temps (on fera apparaître une constante de temps  $\tau$ ). Au bout de combien de temps la voiture s'arrête-t-elle?
2. En déduire l'équation horaire du mouvement. Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue?

**Remarque**

De cet exercice on retiendra surtout ces résultats important au sujet de la décroissance exponentielle.  $\tau$  étant le temps caractéristique de décroissance, on atteint :

- 63 % de la valeur finale en  $t = \tau$ ,
- 95 % de la valeur finale en  $t = 3\tau$ ,
- 99 % de la valeur finale en  $t = 5\tau$ .

**2.2.5 Frottements solides, réaction du support**

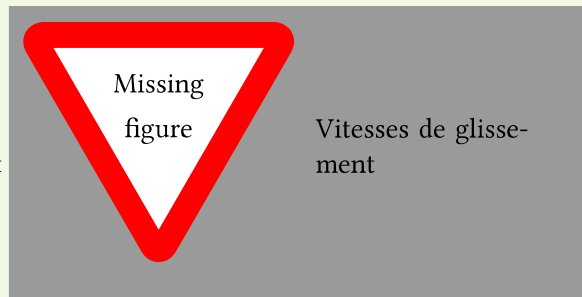
La modélisation des frottements solides entre deux corps est très complexe. Pour le cas de la dynamique du point, on se limite généralement à un énoncé simplifié des LOIS DE COULOMB. Leur énoncé suppose d'avoir défini la VITESSE DE GLISSEMENT :

Sur un support  $\Sigma$  fixe on aura simplement

$$v v * v g(M/\Sigma) = \vec{v}(M/\Sigma)$$

D'un solide sur un autre solide, les deux en contact et en mouvement relatif on a :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I' \in \mathcal{S}_2/\mathcal{R}).$$



Le contact est modélisé par une force nommée réaction du support  $\vec{R}$  qu'on décompose en deux composantes : la réaction normale  $\vec{N}$  et la réaction tangentielle  $\vec{T}$  ("les frottements")  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ . Les lois de Coulomb stipulent :

- Dans le cas où les deux solides ne glissent pas l'un sur l'autre, c'est-à-dire  $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$ , on a

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|.$$

- Dans le cas où les deux solides ne glissent pas l'un sur l'autre, c'est-à-dire  $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \neq \vec{0}$ , on a

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \quad \text{les frottements dissipent de l'énergie.}$$

$f_s$  et  $f_d$  sont les coefficients de frottements statique (ou d'adhérence) et dynamique. Ils sont indépendants de l'aire du contact. On a toujours  $f_s < f_d$  et généralement  $f_s, f_d \leq 1$  sauf dans cas particulièrement adhérente (colle, pneus de F1 sur le bitum, etc.).

Les mouvements du solide en présence de frottements peuvent être plus compliqués : mouvement de roulement avec/sans glissement, bascule, etc.

**Exercice n°13 : Enfant glissant sur un igloo**

Un enfant, ramené à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , glisse sans frottement sur un igloo hémisphérique de rayon  $a$ . On repère sa position grâce à l'angle  $\theta$  qu'il fait avec la verticale. L'enfant est initialement en  $\theta_0 = 0$  et sa vitesse est nulle.

1. Faire un schéma avec le repère cartésien, la base polaire locale, les forces subies par l'enfant.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur la base polaire.
3. En intégrant une des deux équations obtenues, trouver une relation entre  $\dot{\theta}$  et  $\theta$ .
4. En déduire l'expression de la réaction normale en fonction de  $\theta$ . L'enfant décolle-t-il? Si oui, pour quelle valeur de  $\theta$ ?

#### Exercice n°14 : Solide sur un plan incliné

Un solide de masse  $m$  est posé à une distance  $l$  du bord d'un plan mobile faisant initialement un angle  $\alpha = 0^\circ$  avec l'horizontale.

1. On augmente progressivement l'angle  $\alpha$ . Déterminer l'angle  $\alpha_c$  à partir duquel le mobile se met à glisser.
2. On suppose que  $\alpha = \alpha_c$ . Déterminer l'équation horaire du mouvement.

### 2.2.6 Forces exercées sur une particule chargée

La charge électrique se mesure en Coulomb (noté C). La charge électrique élémentaire, notée  $e$ , vaut  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C.  $-e$  est par exemple la charge de l'électron. Toutes les charges rencontrées sont nécessairement des multiples de la charge élémentaire.

**Force exercée par une autre charge** En présence de deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , l'une exerce sur l'autre une force dite INTERACTION COULOMBIENNE :

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r,$$

où  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F · m<sup>-1</sup> est la permittivité diélectrique du vide (voir cours d'électromagnétisme).

Du fait que les charges  $q_1$  et  $q_2$  sont des multiples de la charge élémentaire  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C c'est la norme de cette force est très faible à moins qu'on prenne  $r \rightarrow 0$ , c'est-à-dire de regarder des distances très faibles, de l'ordre de la cohésion atomique.

On ne manquera pas de remarquer l'analogie avec la gravitation. Elle sera exploitée plus en détails dans le cours d'électromagnétisme. Contentons nous de remarquer qu'ici la force de Coulomb peut-être attractive ou répulsive selon le signe relatif des deux charges, tandis que la gravitation est toujours attractive puisqu'il n'existe pas de masse négative.

**Force exercée par un champ** En présence d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , une particule portant une charge électrique  $q$  est soumise à la FORCE DE LORENTZ :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (2.5)$$

#### Exercice n°15 : Effet des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur le mouvement d'une particule chargée

Soit une particule ponctuelle de charge  $q$  et masse  $m$ .

1. On considère que la particule est initialement sans vitesse et placée à l'origine du repère cartésien. Il règne dans tout l'espace un champ électrostatique  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  et pas de champ magnétique. Quelle est l'équation du mouvement? Quelle est la trajectoire de la particule? Comment varient ses énergies?
2. On étudie le mouvement d'un électron dans un champ magnétique uniforme de norme  $B$ , en l'absence de frottements. On travaille dans le système de coordonnées cartésiennes d'axe  $Oz$  colinéaire au champ et tel

que le  $Oxz$  contienne l'électron et son vecteur vitesse à l'instant initial. Ces vecteurs s'écrivent

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{u}_z.$$

a. Montrer que les coordonnées cartésiennes de l'électron vérifient le système différentiel suivant, dans lequel on identifiera la pulsation  $\omega$  :

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y} \quad \ddot{y} = \omega \dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0.$$

b. Résoudre l'équation portant sur la coordonnée  $z$ .

c. Découpler ce système en primitivant la seconde équation puis en la remplaçant dans la première. En déduire les expressions horaires des coordonnées  $x$  et  $y$ .

d. Décrire la trajectoire et tracer son allure.

## 2.3 Conclusion : les quatre interactions fondamentales

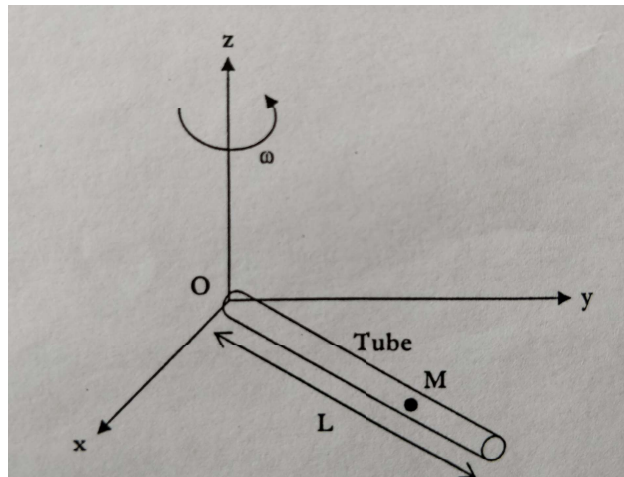
En réalité, on peut résumer *toutes* les forces aux quatre interactions fondamentales suivantes :

- La force électromagnétique, que l'on a décrit plus haut avec la force de Coulomb et celle de Lorentz, régit l'essentiel des phénomènes à notre échelle. C'est la force prédominante pour la vie humaine, qui permet la cohésion de la matière et la conduction électrique notamment.
- La force gravitationnelle, elle aussi décrite précédemment, est l'interaction des (très) grandes échelles, celle qui régit certes la dynamique des corps autour de nous mais surtout la dynamique des astres.
- L'interaction forte permet la cohésion des nucléons du noyau ! Elle doit donc être « forte » pour contrer l'effet répulsif de la force électromagnétique. Par définition, elle s'applique aux hadrons mais pas aux leptons. Notons enfin qu'elle est une manifestation de l'interaction de couleur des quarks (ce qui nous emmène déjà bien loin du programme de l'agrégation).
- L'interaction faible concerne les *quarks* et les *leptons* (électron et ses cousins, muons, tau, neutrinos, etc.). Elle est (surprise) de faible intensité et de très courte portée ( $10 \cdot 10^{-18}$  m). Elle permet d'expliquer un certain nombre de phénomènes à l'échelle des particules fondamentales : transformation des quarks, désintégration des neutrinos, transformation du muon en électron par émission de neutrino et anti-neutrino, etc. Elle a été décrite pour la première fois par Fermi en 1933 et est aujourd'hui englobé avec l'interaction électromagnétique pour former l'*interaction électrofaible*.

## 2.4 Exercices complémentaires

### Exercice n°16 : Bille dans un tube en rotation

Un tube creux de longueur  $L$  tourne autour d'un point  $O$  fixe à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. On place dans ce tube une bille  $M$  de masse  $m$  qui coulisse sans frottements.



- Déterminer le mouvement de la bille dans le tube en donnant l'évolution de la distance  $r(t)$  au point  $O$ , sachant qu'à  $t = 0$  la bille est à une distance  $d < L$  de  $O$ , sans vitesse initiale.
- Au bout de combien de temps la bille est-elle éjectée ?
- On attache la bille à un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$ , dont l'autre extrémité est fixée en  $O$ . Montrer que la bille peut effectuer des oscillations harmoniques autour d'une position à déterminer. À quelle condition ceci est-il possible ?

### Exercice n°17 : Propulsion d'une fusée

Dans cet exercice, et pour à peu près la seule fois de ce TD, on se propose d'étudier un système ouvert. On étudie le décollage et le vol d'une fusée de masse initiale  $m_0$  (masse de la fusée et du carburant). On notera, à l'instant  $t$ ,  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_z$  la vitesse de la fusée,  $m(t)$  la masse du système {fusée + gaz contenus dedans à l'instant  $t$ } (système ouvert  $\mathcal{S}$ ) et le débit massique d'éjection des gaz brûlés  $D_m = -\frac{dm}{dt} > 0$ . Les gaz sont éjectés avec une vitesse  $\vec{u} = -u\vec{u}_z$  relativement à la fusée. On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- Pour pouvoir discuter du PFD on définit le système *fermé*  $\Sigma$  constitué :

- à l'instant  $t$ , de l'ensemble {fusée + gaz contenus}, soit

$$\Sigma(t) = \mathcal{S}(t),$$

- à l'instant  $t + dt$ , de la fusée, des gaz restants et des gaz éjectés pendant  $dt$ , soit

$$\Sigma(t + dt) = \mathcal{S}(t + dt) + \{\text{gaz éjectés pendant } dt\}.$$

Quelle est la quantité de mouvement du système  $\Sigma$  à l'instant  $t$ ? à l'instant  $t + dt$ ? Exprimer alors  $d\vec{p}_\Sigma/dt$ .

- La fusée est soumise à un ensemble de champ de gravitation résultant en une force notée  $\vec{F}_{\text{ext}}$ . Appliquer le PFD à la fusée dans le référentiel de la Terre supposé galiléen. En se ramenant à une expression de la forme  $m\vec{a} = \dots$ , identifier la *force de poussée*. Commenter son expression, sens, etc.

- À quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

- Lorsque la fusée a échappé à la gravité, on montre la relation de Tsiolkovski qui relie l'accroissement de vitesse  $\Delta v$  à la diminution de masse de  $m_i$  à  $m_f$  :

$$\Delta v = u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right).$$

En considérant une fusée de masse totale  $m_0 = 134$  t, constituée d'un premier étage de masse  $m_1 = 110$  t dont 100 tonnes d'ergols (carburant), et un deuxième étage de  $m_2 = 24$  t dont 20 tonnes d'ergols, et une vitesse d'éjection  $u = 4,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , montrer l'intérêt de cette construction par étage.

L'exercice suivant est à faire après le cours d'électromagnétisme sur le théorème de Gauss.

### Exercice n°18 : Champ de gravitation engendré par un corps à symétrie sphérique

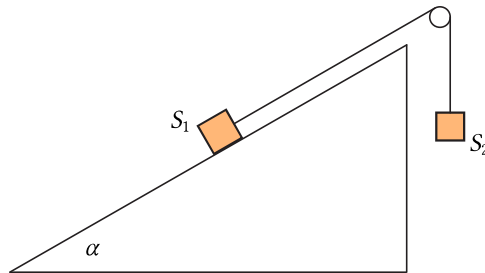
1. Rappeler l'analogie entre électromagnétisme et gravitation.
2. Par application du théorème de Gauss gravitationnel, exprimer le champ de gravitation créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon  $R$  et de masse  $m$  homogène.
3. Commenter l'expression obtenue pour  $r > R$ .

### Exercice n°19 : Livraison d'un colis par avion

1. Un avion vole horizontalement à une altitude  $h_0 = 500$  m et à une vitesse  $v_0 = 100$  km/h. Il lâche un colis de masse  $m = 50$  kg. On néglige les frottements exercés par l'air. Quelle distance horizontale le colis a-t-il parcouru lorsqu'il touche le sol? Quelle est sa vitesse au moment de l'impact?
2. Même question avec des frottements fluides linéaires de constante  $\lambda = 25$  kg/s.

### Exercice n°20 : Comportement d'un système masses - poulie - frottements

Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.



$S_1$  de masse  $m_1$  glisse sur le plan incliné et  $S_2$  de masse  $m_2$  se déplace verticalement. Ces solides sont en translation, assimilés à des points matériels. On suppose que le fil est inextensible et de masse nulle, il transmet donc les tensions, c'est-à-dire que la tension est la même à chacune de ses extrémités.

À  $t = 0$ , le système est libéré sans vitesse initiale et  $S_2$  est à une hauteur  $h$  du sol.

1. À quelle condition sur les masses  $m_1$  et  $m_2$  le solide  $S_2$  atteint-il le sol? Déterminer alors sa vitesse au moment de l'impact.
2. Même question s'il existe des frottements solides au niveau du plan incliné. On notera  $\mu$  le coefficient de frottement.





## Chapitre 3

# Aspects énergétiques

La description énergétique de la mécanique est importante par plusieurs aspects. D'une part elle permet de faire le lien avec les autres branches de la mécanique (électromagnétisme, thermodynamique, etc.) puisque l'énergie est la quantité transverse de la physique par excellence. De plus, les théorèmes énergétiques permettent toujours de mener à une (mais une seule) équation scalaire qui, lorsque le problème étudié possède un unique degré de liberté, suffit à conclure.

### 3.1 Énergie développée par une force

**Travail** On appelle TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE D'UNE FORCE  $\vec{F}$  sur un déplacement infinitésimal  $d\vec{l}$  la quantité  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$  et TRAVAIL D'UNE FORCE  $\vec{F}$  le long du chemin  $AB$  la quantité

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (3.1)$$

C'est une énergie fournie/absorbée par la force  $\vec{F}$  pendant le mouvement de  $M$  entre  $A$  et  $B$ . Elle s'exprime donc en Joule  $J$  et  $[E] = ML^2T^{-2}$ .

**Puissance** Lorsqu'un point  $M$  est soumis à la force  $\vec{F}$  en se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$ , on définit la PUISSANCE de cette force par

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3.2)$$

C'est une énergie fournie/absorbée par unité de temps, qui s'exprime en Watt :  $W = J \cdot s^{-1}$ .

### 3.2 Énergies usuelles des systèmes mécaniques

**Énergie cinétique** L'ÉNERGIE CINÉTIQUE d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}(M)$  est la quantité :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2. \quad (3.3)$$

Il est important de noter que l'énergie d'un système en mouvement varie comme le carré de la vitesse et non proportionnellement à celle-ci. Cela explique notamment beaucoup de mesure de sécurité routière !

**Énergie potentielle** En général, le travail d'une force dépend fortement du trajet suivi : on se doute qu'une voiture s'use d'avantage si on fait Paris-Marseille en passant par Lyon ou par Vladivostok...

Il existe cependant une classe de forces qu'on qualifie de CONSERVATIVES dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée, et pas du chemin suivi.

Lorsqu'une force  $\vec{F}$  est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction des coordonnées d'espace  $E_p(x, y, z, t)$  telle que l'on puisse écrire

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

On appelle alors ÉNERGIE POTENTIELLE (associée à  $\vec{F}$ ) cette fonction  $E_p$ .

### Exercice n°21 : Caractère conservatif du poids et de la force de rappel d'un ressort

Afin de démontrer que le poids et la force de rappel d'un ressort sont conservatives, identifier les énergies potentielles associées.

Ces deux définitions [ $W$  ne dépend pas du chemin suivi Vs  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ ] sont bien équivalentes en vertu du calcul suivant :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dE_p \\ &= E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \end{aligned}$$

Ainsi, le travail ne dépend que de la valeur de  $E_p$  au départ et à l'arrivée. Par ailleurs, il s'agit d'une différence, donc la constante indéterminée liée à la définition de l'énergie potentielle importe peu.

#### Remarque

- Le signe moins devant le gradient est une convention, mais est néanmoins important comme nous le verrons dans la section suivante. Il ne faut pas l'oublier lorsqu'on calcule l'énergie potentielle associée à une force conservative.
- La définition par le gradient signifie que l'énergie potentielle est définie à une constante près (dont le gradient sera nul!). En général, on est intéressé par des différences ou variations d'énergie potentielle et la constante importe peu. Si toutefois on donne une valeur absolue d'énergie potentielle, il convient de préciser la référence qu'on se donne (par exemple, on prend souvent l'énergie potentielle de pesanteur nulle à l'altitude zéro). C'est l'équivalent, en mécanique, de la masse en électrocinétique qui sert de référence de potentiel électrique.
- Attention à la dérivation qui permet de passer de l'énergie à la force : il s'agit bien d'une dérivation par rapport à l'espace. Jusque là nous faisons essentiellement des dérivations par rapport au temps, et nous y reviendrons très vite. Attention à se mettre bien au clair sur cette question.

**Exercice n°22 : Un calcul de travail**

Soit un point  $M$  évoluant dans le plan, soumis à une force

$$\vec{F}(x, y) = \alpha[(y^2 - x^2)\vec{u}_x + 3xy\vec{u}_y].$$

Soient les points  $A(p, 0)$ ,  $B(0, p)$ ,  $C(p, p)$ . Calculer :

- le travail de  $\vec{F}$  en allant de l'origine à  $C$  en passant par  $A$ .
- le travail de  $\vec{F}$  en allant de l'origine à  $C$  en passant par  $B$ .
- le travail de  $\vec{F}$  en allant de l'origine à  $C$  directement.

Conclure.

**Énergie mécanique** L'énergie mécanique est définie comme la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$E_m = E_c + E_p. \quad (3.4)$$

### 3.3 Théorèmes énergétiques

#### 3.3.1 Théorème de la puissance/l'énergie cinétique

On obtient le théorème de l'énergie cinétique à partir du principe fondamental de la dynamique appliqué, dans un référentiel galiléen, à un système fermé de masse  $m$  :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (3.5)$$

en prenant le produit scalaire avec la vitesse  $\vec{v}$  du point  $M$ , et comme  $\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt = d(v^2/2)/dt$ , on a

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \quad (3.6)$$

C'est le **THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE** : la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance des forces s'exerçant sur ce point.

On peut ensuite intégrer cette identité sur une trajectoire allant d'un point  $A$  (position de  $M$  à  $t = t_A$ ) jusqu'à un point  $B$  (position de  $M$  à  $t = t_B$ )

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_c}{dt} dt = \int_A^B dE_c = \sum \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (3.7)$$

soit finalement, comme  $\vec{v} dt = d\vec{l}$ ,

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}) \quad (3.8)$$

C'est le **THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE** : la variation d'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  le long d'un trajet est égale à la somme des travaux des forces exercées sur  $M$  au cours de ce trajet.

#### Remarque

Il faut noter que ces deux théorèmes incluent, dans leur membre de droite, *toutes* les forces exercées sur le point matériel ou le système étudié pendant le mouvement. Ils ne font aucune distinction entre les forces conservatives ou non-conservatives.

### 3.3.2 Théorème de l'énergie mécanique

Supposons maintenant que le point matériel étudié est uniquement soumis à des forces conservatives. On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_{AB}(\vec{F}) = \sum -\Delta E_p \Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_m = 0 \quad (3.9)$$

C'est le THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE : l'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives est conservée au cours du temps.

Notons enfin deux points qui découlent de ce théorème :

- Si le point matériel subit des forces non-conservatives dont la résultante est  $\vec{F}_{nc}$  on devra corriger le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = W_{AB}(\vec{F}_{nc}).$$

- Aussi, de même qu'il y a un théorème de l'énergie cinétique et un théorème de la puissance cinétique, il y a un théorème de l'énergie mécanique et un théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}).$$

#### Exercice n°23 : Retour sur le pendule simple

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple à l'aide de considérations énergétiques.

#### Remarque

Insistons pour conclure sur le fait que ces quatre théorèmes sont en fait les mêmes simplement écrits dans des formes plus ou moins adaptées à telle ou telle situation : est-ce qu'il y a des forces non-conservatives ou pas ? Est-ce que j'ai intérêt à travailler en grandeur instantanée ou en grandeur intégrale ? De plus, ils ne sont pas indépendants du PFD, dont ils découlent.

Ainsi, on aura intérêt à appliquer un théorème énergétique lorsque le système étudié possède un unique degré de liberté puisqu'alors l'équation facilement obtenue suffira à résoudre le problème. De plus, si le PFD a été appliqué, aucun des quatre théorèmes énergétiques n'apportera d'information supplémentaire.

## 3.4 Équilibre et stabilité

### 3.4.1 Notion d'équilibre mécanique

Lorsqu'on étudie un système mécanique, on est souvent amené à se poser la question de sa ou ses position(s) d'équilibre. En effet, cette question est souvent plus simple que la résolution des équations du mouvement permettant d'obtenir toutes les trajectoires du système.

Souvent, la position d'équilibre (si elle existe) correspond à la limite aux temps longs de la trajectoire de la particule.

Les positions d'équilibre d'un système correspondent à des situations où le système est pseudo-isolé : la somme des forces auxquelles il est soumis s'annule<sup>1</sup> En présence de forces uniquement conservatives, on va chercher les positions d'équilibre comme des points de l'espace où l'énergie potentielle est extrémale :

$$x_{eq} \text{ position d'équilibre} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}(E)_p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \text{ en 1D.} \quad (3.10)$$

1. bien sûr, une telle situation peut se produire sans que le point soit immobile...

**Remarque**

Attention à bien faire la distinction entre *position d'équilibre* et *équilibre d'un système*. Pour qu'un système mécanique soit à l'équilibre il faut qu'il soit immobile et qu'il le reste. Autrement dit, il faut qu'il ait une vitesse nulle à l'instant initial et que son accélération soit nulle aussi ce qui, par le PFD, revient à être isolé ou pseudo-isolé. Une position d'équilibre ne remplit que cette seconde condition de sorte qu'on peut être en une position d'équilibre sans être soi-même l'équilibre. Il suffit d'être arrivé là avec une vitesse non nulle. En conclusion, un système est à l'équilibre mécanique s'il est placé en une position d'équilibre avec une vitesse initiale nulle.

**3.4.2 Stabilité d'une position d'équilibre**

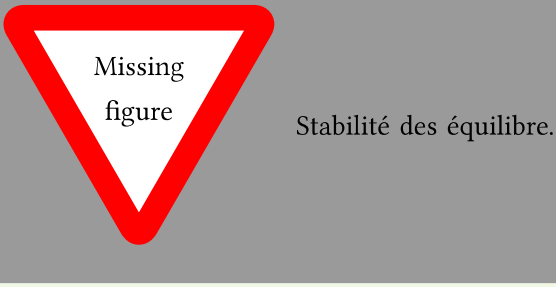
Une fois la/les position(s) d'équilibre déterminée(s), il convient de se poser la question de leur stabilité.

Comment caractériser la stabilité d'un équilibre (mécanique ou non)? L'idée est simple : un système en équilibre stable reviendra à cet équilibre si on l'en écarte un peu. Au contraire, si l'équilibre est instable, une petite perturbation éloignera définitivement le système de cet équilibre.

Schématiquement, la situation est la suivante :

**Remarque**

Penser au cas d'une bille sur un saladier au sommet d'un saladier retourné ou dans le bon sens...



Stabilité des équilibre.

En conclusion, on retiendra :

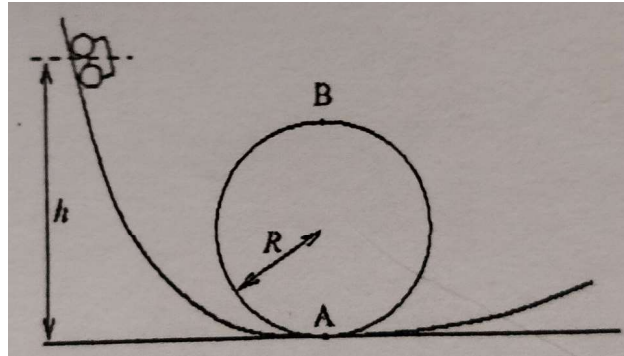
- Un équilibre est dit stable si  $E_p$  est minimale, i.e.  $\partial^2 E_p / \partial x^2 > 0$
- Un équilibre est dit instable si  $E_p$  est maximale, i.e.  $\partial^2 E_p / \partial x^2 < 0$

Une étude plus approfondie du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre est proposée dans le chapitre 5. Il faudra bien prêter attention au fait qu'ici la dérivation de  $E_p$  se fait par rapport à l'espace et non par rapport au temps!

### 3.5 Exercices complémentaires

#### Exercice n°24 : Looping!

Un chariot roule sans frottement le long d'un rail faisant une boucle de rayon  $R$  comme représenté ci-dessous. On le lâche sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$ .



1. Déterminer la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  du chariot en un point du looping en fonction de  $\theta$ .
2. Par application du PFD, déterminer l'expression de la réaction normale en fonction de  $\theta$ .
3. Montrer que, à  $h$  fixée, la réaction est minimale en B. En déduire une condition sur  $h$  pour que la bille fasse un tour complet.
4. Si  $h$  est trop faible, donner l'expression de l'angle  $\theta_{\text{dec}}$  où se fait le décollage de la bille.

#### Exercice n°25 : Voyage au centre de la Terre

On creuse entre deux points de la Terre  $A$  et  $B$  un tunnel rectiligne. La Terre est une sphère homogène de masse volumique  $\rho$  et de rayon  $R_T$ . Un train (point  $M$  de masse  $m$ ) se déplace sans frottements dans ce tunnel sous la seule action de la force de Gravitation.

La masse de la Terre dépendant de la profondeur où l'on se trouve (cf. Électromagnétisme et théorème de Gauss), on admet que l'expression de cette force est  $\vec{F} = -\frac{GmM(r)}{r^2}\vec{u}_r$ , où  $r$  est la distance au centre de la Terre et  $M(r)$  la masse contenue dans la sphère de rayon  $r$ .

1. Montrer que  $\vec{F} = -mg\frac{r}{R_T}\vec{u}_r$ .
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à cette force, d'abord en fonction de  $r$  puis de l'abscisse  $x$  du train dans le tunnel.
3. Déterminer l'équation du mouvement du train.
4. Quelle est la nature du mouvement? Combien de temps faut-il pour aller de  $A$  à  $B$ ?

#### Exercice n°26 : Pendule avec frottements

On considère la situation suivante : un pendule simple est placé sur un plan incliné d'un angle  $\gamma$ . Il est lâché d'un angle  $\alpha$ , mais à cause de la présence de frottements ne remonte que d'un angle  $\beta < \alpha$  de l'autre côté. Déterminer le coefficient de frottement  $\mu$  en fonction des angles du problème.

#### Exercice n°27 : Distance d'arrêt d'une voiture

Une voiture roulant à 50 km/h a besoin de 40 m pour s'arrêter. On ne considère que les frottements solides entre elle et le sol. De quelle distance d'arrêt aura-t-elle besoin à 80 km/h?

# Chapitre 4

## Moment cinétique

### 4.1 Définitions

#### 4.1.1 Nécessité

Pourquoi définir une autre quantité que la quantité de mouvement ? Après tout, celle-ci permet, via le principe fondamental de la dynamique, de décrire les équations horaires de n'importe quel point matériel.

Cependant, sur le cas du mouvement circulaire, on sent que cette description est peu adaptée. En effet, dans le cas de ce mouvement plutôt symétrique, la quantité de mouvement change de direction en permanence, et la description est donc peu pratique. On voudrait donc définir une quantité à même de dire « le système tourne », un peu comme la quantité de mouvement dit « le système se translate ».

#### 4.1.2 Moment cinétique d'un point matériel

**Par rapport à un point** Soit  $O$  un point fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  galiléen. Le MOMENT CINÉTIQUE du point  $M$  dans  $\mathcal{R}$  est défini par :

$$\boxed{\vec{L}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}. \quad (4.1)$$

Il s'agit bien entendu d'une notion qui dépend du référentiel  $\mathcal{R}$ , mais aussi du point par rapport auquel on le calcule. Dans toute la suite on se cantonne au cas, qui est le seul intéressant, où le point de calcul est fixe dans le référentiel d'étude.

**Par rapport à un axe** Soit un axe  $\Delta$  (porté par un vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$ ) passant par le point  $O$ . Le moment cinétique du point  $M$  selon  $\Delta$  vaut

$$L_\Delta = \vec{L}_O(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\Delta. \quad (4.2)$$

### 4.2 Théorème du moment cinétique

De la même manière que le moment cinétique traduit la rotation comme la quantité de mouvement traduit la translation, il nous faut un outil pour quantifier les actions qui « mettent en rotation » comme la force met en translation. Le théorème du moment cinétique sera alors équivalent du PFD pour la rotation.

#### 4.2.1 Moment d'une force

On appelle MOMENT D'UNE FORCE  $\vec{F}$  agissant sur un point matériel  $M$  par rapport au point  $O$  (fixe dans  $\mathcal{R}$ ) la quantité

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}. \quad (4.3)$$

On définit de même le moment d'une force par rapport à l'axe  $\Delta$  :  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\Delta$ .

### 4.2.2 Théorème du moment cinétique

Partons de la définition  $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$  et dérivons :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{\vec{v}} \wedge \vec{v} + \vec{OM} \wedge \underbrace{\frac{dm\vec{v}}{dt}}_{\vec{F}} = \vec{\mathcal{M}}_O(M).$$

Finalement, on obtient le théorème du moment cinétique :

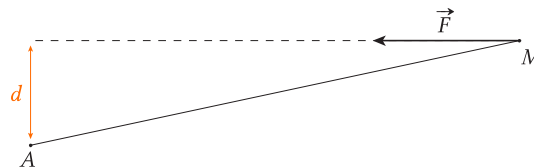
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R})}. \quad (4.4)$$

Ce théorème extrait l'information suivante : pour faire tourner un point (lui donner du moment cinétique), il faut appliquer une force qui ait du moment. Pour un axe fixe  $\Delta$ , on peut prendre le produit scalaire et obtenir le théorème du moment cinétique selon un axe

$$\frac{dL_\Delta(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}/\mathcal{R}). \quad (4.5)$$

#### Exercice n°28 : Importance du bras de levier

Soit un point  $M$  que l'on cherche à mettre en rotation autour de  $A$ , fixe dans  $\mathcal{R}$ , par application d'une force  $\vec{F}$ . Le *bras de levier* est la distance  $d$  entre  $A$  et la droite portée par  $\vec{F}$  (voir schéma).



Montrer que le moyen le plus efficace de mettre  $M$  en rotation est de maximiser  $d$ . Interpréter, par exemple la position des poignées sur les portes.

#### Exercice n°29 : Encore (!) une méthode pour le pendule simple

Retrouver l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur  $l$  et masse  $m$  par application du théorème du moment cinétique.

## 4.3 Moment cinétique d'un solide, énergie de rotation

### 4.3.1 Axe de rotation d'un solide

Rappelons qu'un solide  $\mathcal{S}$  est défini comme un ensemble de points dont la distance les uns par rapport aux autres ne varie pas au cours du temps :  $\forall P, Q \in \mathcal{S}, \|\vec{PQ}\| = \text{cste}$ . Cette propriété permet de montrer l'existence d'un



axe privilégié du solide, appelé axe de rotation. On y associe alors un unique VECTEUR ROTATION  $\vec{\Omega}$  tel que

$$\forall A, B \in S, \vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}.$$

Cette relation est communément appelée RELATION DE VARIGNON.

### 4.3.2 Lien entre rotation et moment cinétique

Pour un ensemble de points matériels ( $z$  représente l'axe  $Oz$  porté par  $\vec{u}_z$ ) :

$$L_z = \sum_{M_i \in S} L_z(M_i) = \sum_{M_i \in S} (\vec{OM}_i \wedge m \vec{v}_i) \cdot \vec{u}_z \quad (4.6)$$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe il est judicieux de mener l'étude dans le repère cylindrique dont l'axe est l'axe de rotation du solide. On a alors  $\vec{OM}_i = r_i \vec{u}_r$  et  $\vec{v}_i = r_i \omega \vec{u}_\theta$  où  $\omega = \dot{\theta}$  est la vitesse angulaire de rotation. On a alors :

$$\vec{L} = \sum (r_i \vec{u}_r \wedge m_i r_i \omega \vec{u}_\theta) = \sum m_i r_i^2 \omega \vec{u}_z = \omega \sum m_i r_i^2 \vec{u}_z = J \omega \vec{u}_z.$$

avec  $J = \sum_{M_i \in S} r_i^2 m_i$  le MOMENT D'INERTIE du solide autour de  $Oz$ . Par définition il est homogène à  $ML^2$  et s'exprime communément en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

### 4.3.3 Énergie de rotation

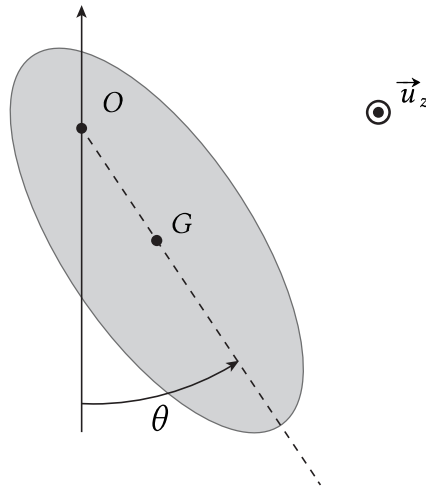
L'énergie cinétique de rotation propre d'un solide s'écrit alors :

$$E_{\text{rot}} = \sum_{M_i \in S} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{M_i \in S} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{M_i \in S} m_i r_i^2,$$

$$\text{d'où } E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

#### Exercice n°30 : Étude du pendule pesant

On considère le pendule pesant de la figure suivante. À la différence du pendule simple on ne se place plus dans le modèle du point matériel mais on considère la rotation d'un solide.



On note  $I_\Delta$  le moment d'inertie de ce pendule par rapport à l'axe de rotation  $\Delta = Oz$ . La liaison pivot en O est supposée parfaite. On note enfin  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = \dot{\theta} \vec{u}_z$  le vecteur vitesse angulaire du pendule,  $\theta$  étant l'angle avec la verticale.

1. Trouver l'équation du mouvement par application du théorème du moment cinétique.
2. Retrouver l'équation du mouvement par des considérations énergétiques.
3. Linéariser l'équation du mouvement aux petits angles et déterminer la pulsation propre du système. Comment diffère-t-elle de celle du pendule simple ?

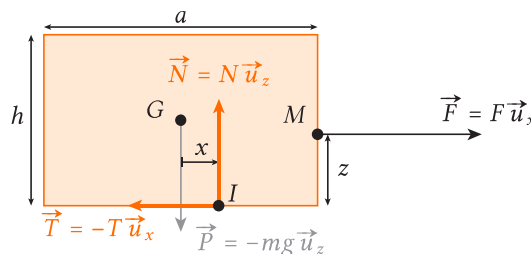
#### 4.4 Exercices complémentaires

##### Exercice n°31 : Bille dans une cuvette de potentiel

Calculer la période des oscillations effectuées par une bille de masse  $m$  au fond d'une cuvette sphérique de centre  $O$  et de rayon  $R$ . On négligera les frottements et on supposera que l'amplitude des oscillations reste faible.

##### Exercice n°32 : Basculement ou glissement d'un pavé ?

Considérons un pavé de côté  $a$  et hauteur  $h$ , de masse  $m$ , posé sur un plan et tiré dans la direction  $\vec{u}_x$  par une force  $\vec{F} = F \vec{u}_x$  appliquée en  $M$  comme représenté figure ???. Le frottement entre le pavé et le plan est caractérisé par un unique coefficient  $f$ .



Sur cette figure le point  $I$  d'application de la réaction du support est placé au hasard, nous en déterminerons la position plus bas.

1. **Glissement** : à quelle condition sur  $\vec{F}$  le pavé reste-t-il immobile ? Dans cette situation d'équilibre, exprimer  $N$  et  $T$  en fonction des paramètres du problème  $m$ ,  $g$  et  $F$ .
2. **Point d'application de  $\vec{R}$**  : Écrire l'équilibre des moments au point  $I$  et en déduire l'expression de  $x$  en fonction de  $F$ ,  $m$ ,  $g$  et  $z$ . Interpréter l'expression trouvée.
3. **Basculement** : à quelle condition le solide bascule-t-il ? Comparer à la condition de glissement.



## Chapitre 5

# Oscillateurs harmonique et amortis en régime libre

### 5.1 Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre

#### 5.1.1 Potentiel proche de l'équilibre

Comme on l'a vu dans le chapitre 3, l'équilibre mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives se produit lorsqu'un point matériel est situé avec  $\vec{v} = \vec{0}$  sur un extrémum du potentiel. On a par ailleurs vu que lorsque cet extrémum est un minimum ( $\partial^2 E_p / \partial x^2 > 0$ ), la position d'équilibre est stable. On s'intéresse dans un premier temps au mouvement autour de cette position d'équilibre que l'on note  $x_{\text{eq}}$ .

Exprimons le potentiel par développement limité au voisinage d'une position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$  :

$$E_p(x) \approx E_p(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} \kappa (x - x_{\text{eq}})^2.$$

Dès lors, un point matériel de masse  $m$  écarté au voisinage de  $x_{\text{eq}}$  ressent selon  $\vec{u}_x$  une force  $F = -\partial E_p / \partial x = -\kappa(x - x_{\text{eq}})$ .

#### 5.1.2 Cas de l'équilibre instable

Le cas d'un équilibre instable correspond à  $\kappa < 0$ , on note donc  $\kappa = -|\kappa|$ . L'application du PFD donne alors :

$$m\ddot{x} - |\kappa|(x - x_{\text{eq}}) = 0 \implies \ddot{X} - \frac{1}{\tau^2} X = 0, \quad (5.1)$$

où on a posé  $X = x - x_{\text{eq}}$  l'écart à la position d'équilibre et  $1/\tau = \sqrt{-\kappa/m}$  le temps caractéristique de l'équation. Par la suite, on prendra souvent  $x_{\text{eq}} = 0$  de sorte que  $x = X$ .

La solution de cette équation 5.1 s'écrit en somme d'exponentielles réelles :

$$X(t) = \alpha \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + \beta \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Si le point  $M$  est lâché d'une position  $x_0 \neq 0$  sans vitesse initiale on peut exprimer les constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$X(0) = \alpha + \beta = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{X}_0 = \frac{\alpha}{\tau} - \frac{\beta}{\tau} = 0.$$

Ainsi,  $\alpha = \beta = x_0/2$  et

$$X(t) = x_0 \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

## 5.2 Oscillateur harmonique

### 5.2.1 Équation du mouvement

Le cas d'un équilibre stable est plus riche. Il correspond à  $\kappa > 0$ . L'application du PFD donne alors :

$$m\ddot{x} + \kappa(x - x_{\text{eq}}) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0},$$

où on a posé  $X = x - x_{\text{eq}}$  l'écart à la position d'équilibre et  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$  la pulsation propre de l'oscillateur. Il s'agit de l'équation d'un OSCILLATEUR HARMONIQUE.

On constate donc que l'oscillateur harmonique apparaît de manière très générale dès qu'on écarte un mobile d'une position d'équilibre stable, et ce quelle que soit la forme réelle du potentiel au-delà du voisinage. Nous allons démontrer que celui-ci va osciller autour de cette position d'équilibre.

Exemples déjà rencontrés d'oscillateur harmonique : système masse ressort ; pendule simple linéarisé ; bouchon en liège dans l'eau.

### 5.2.2 Équations horaires

On garde les mêmes conditions initiales que précédemment : le mobile, à l'instant  $t = 0$ , est écarté de l'équilibre en  $x_0$  et lâché sans vitesse. Les solutions sont de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow x(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.2)$$

où on doit déterminer au choix l'un des deux couples de constantes  $(A, B)$  ou  $(C, \phi)$ .

#### Remarque

Ces deux formes de la solution sont équivalentes. Le choix d'utiliser l'une ou l'autre se fait selon les cas, en particulier en fonction des conditions initiales imposées, ou du résultat auquel on veut aboutir. Ici la condition initiale nulle sur la vitesse invite à utiliser la première forme puisqu'on va annuler immédiatement une des deux constantes.

La condition sur la vitesse impose que

$$\dot{x}(t=0) = \omega_0 B = 0,$$

donc  $B = 0$ , puis la condition sur la position fournit  $A = x_0$ , d'où

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

On en déduit trois conséquences importantes qui caractérisent l'oscillateur harmonique.

### 5.2.3 Persistance des oscillations dans le temps

La première conséquence, qui est due directement à la modélisation effectuée qui ne prend en compte aucune source de dissipation d'énergie, est le fait que les oscillations persistent indéfiniment dans le temps. En effet la solution, purement sinusoïdale, ne voit pas son amplitude diminuer ni augmenter lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . C'est évidemment une différence notable avec les systèmes physiques oscillants *réels*.

### 5.2.4 Isochronisme des oscillations

La résolution nous a permis de mettre en évidence la pulsation du mouvement qui se trouve être toujours égale à  $\omega_0$  et ce quelles que soient les conditions initiales. On retient que la période des oscillations ne dépend pas des conditions initiales et on parle d'ISOCRONISME des oscillations.

**Oscillateur non linéaire** Cette propriété n'est pas toujours vraie pour les systèmes réels. En particulier pour le pendule simple, le terme non linéaire dans l'équation du mouvement  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$  ne peut pas être linéarisé pour des angles trop importants. Il en découle que la période se met à dépendre de l'amplitude du mouvement selon la FORMULE DE BORDA :

$$T(\theta_0) = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right),$$

où  $T(\theta_0)$  est la période des oscillations lorsque l'amplitude du mouvement angulaire est  $\theta_0$  et  $T_0$  est la période propre de l'oscillateur ( $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ). On parle de PERTE D'ISOCRONISME. Vous pourrez constater expérimentalement cet effet dans le TP *mécanique*.

### 5.2.5 Échange d'énergie potentielle et cinétique

À partir de l'équation horaire  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  le calcul de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique est immédiat :

dès lors, comme  $\kappa = m\omega_0^2$ , on voit en faisant une moyenne sur une période (et en se souvenant<sup>1</sup> que  $\langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle = \langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle = 1/2$ ) qu'on a :

1. Si on ne se souvient pas :

$$\langle \cos^2(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T dx \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) = \frac{1}{T} \frac{T}{2} + \frac{1}{T} \int_0^{2T} \cos(u) du = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle}. \quad (5.3)$$

On a par ailleurs, à tout instant, et comme  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ,

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = m\omega_0^2 x_0^2 = \text{cste}},$$

ce qui est à nouveau cohérent avec l'absence de dissipation d'énergie. *L'énergie est conservée.*

Au-delà de la conservation d'énergie, qui était attendue, on s'aperçoit surtout que l'oscillateur harmonique joue le rôle d'« échangeur parfait d'énergie » entre énergie cinétique et énergie potentielle : toute l'énergie passe périodiquement de l'une à l'autre des deux formes, sans perte.

## 5.3 Oscillateurs amortis

### 5.3.1 Modélisation du frottement

Dans un premier temps, et jusqu'à 5.3.4, on s'intéresse au mouvement d'un oscillateur soumis à une force de frottement fluide. On quitte donc le cadre des puits de potentiel et autres dessins pédagogiques, puisque les frottements sont par essence non-conservatifs.

En pratique, pour pouvoir faire des calculs explicites, nous choisissons une modélisation simple : l'oscillateur est un point matériel  $M$  de masse  $m$  relié à un ressort horizontal de raideur  $k$  et longueur à vide  $l_0$ . Le frottement fluide est pris linéaire :  $\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda \vec{v}$ .

### 5.3.2 Équations du mouvement

L'ajout de la force de frottement transforme le PFD appliqué au point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire supposé galiléen en :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \implies \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$x$  est l'écart à la position d'équilibre  $l_0$ . On a de nouveau posé  $\omega_0^2 = k/m$ , pulsation propre de l'oscillateur, et on introduit  $\lambda/m = \omega_0/Q$ . Ce nombre  $Q = \sqrt{km}/\lambda$  (sans dimension) est appelé FACTEUR DE QUALITÉ de l'oscillateur.



### 5.3.3 Régimes d'évolution

On souhaite résoudre l'équation différentielle  $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . On cherche des solutions de la forme  $e^{rt}$ , ce qui donne l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{dont le discriminant vaut} \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right),$$

et les solutions sont finalement :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad (5.4)$$

On distingue ensuite trois cas selon le signe de  $\Delta$  (donc de  $\frac{1}{4Q^2} - 1$ ) :

$\Delta > 0$  soit  $Q < 1/2$  C'est le RÉGIME APÉRIODIQUE, fortement amorti. En effet,  $Q$  faible correspond à  $\lambda$  grand. Les solutions sont de la forme

$$x(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} \quad (5.5)$$

Il est facile de montrer (le faire) que  $r_{\pm} < 0$ . Les constantes d'intégration sont déterminées grâce aux conditions initiales. Finalement, la trajectoire de l'oscillateur est la suivante :

$\Delta = 0$  et  $Q = 1/2$  C'est le RÉGIME CRITIQUE, qui est impossible à obtenir dans la réalité expérimentale. Les solutions sont :

$$x(t) = (A + Bt) \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right),$$

et la trajectoire est de la forme :

$\Delta < 0$  et  $Q > 1/2$  C'est le RÉGIME PSEUDO-PÉRIODIQUE, ou régime faiblement amorti (puisque dans le cas où  $Q$  est grand,  $\lambda$  est faible). Les racines de l'équation caractéristique ont une partie imaginaire, d'où des solutions en partie oscillantes :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

où on a noté  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  la pseudo-pulsation, associée à la pseudo-période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . La trajectoire a la forme suivante :

Dans tous les cas, le mouvement de l'oscillateur s'amortit en un temps caractéristique  $\tau = m/\lambda = Q/\omega_0$  qui est d'autant plus court (amortissement rapide) que le paramètre de frottement  $\lambda$  est grand. Aussi, les oscillations (quand elles existent) sont enveloppées par deux exponentielles.

#### 5.3.4 Oscillateur amorti par frottements solides

Le traitement de l'oscillateur amorti par frottements solides est plus compliqué. On représente sur la figure 5.1 la trajectoire d'un tel oscillateur.

On retient les points suivants :

- l'enveloppe des oscillations est linéaire, et non exponentielle ;
- il existe une plage de positions d'équilibre et non une unique position d'équilibre ;

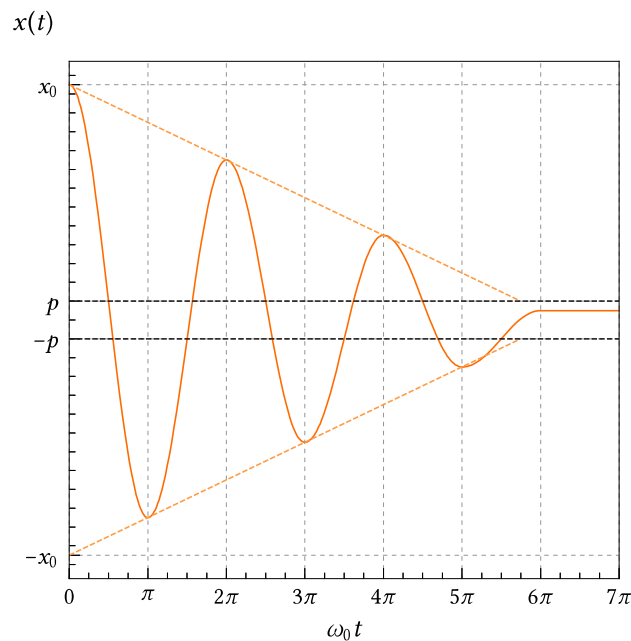


FIGURE 5.1 – Trajectoire de l'oscillateur amorti par frottements solides. On a représenté l'enveloppe linéaire des oscillation. La plage d'arrêt est l'intervalle  $[-p, p]$  où  $p = fmg/k$ .

- l'oscillateur s'arrête en un temps fini contrairement à ce qui se passe, en théorie, pour l'amortissement fluide.

La compréhension numérique de ces observations sera proposée en exercice.

## 5.4 Portrait de phase

L'étude des systèmes mécaniques permet de montrer l'importance de la notion de PORTRAIT DE PHASE, laquelle permet une interprétation géométrique élégante des équations. Surtout, dans le cas de système plus complexes pour lesquels une résolution numérique n'est pas envisageable, le portrait de phase permet de pouvoir quand même discuter la dynamique du système.

**Définition** Le portrait de phase est la représentation graphique dans le plan (pour un système 1D) des variations d'une variable dynamique ( $x$ ) en fonction de sa dérivée ( $\dot{x}$ ). À chaque jeu de conditions initiales  $x_0, \dot{x}_0$  correspond une unique trajectoire.

### Remarque

En effet, pour les équations différentielles croisées en physique, le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit qu'à la donnée d'une équation différentielle et d'un jeu complet de conditions initiales<sup>a</sup> correspond une *unique* solution. Si deux trajectoires se croisent dans le plan de phase cela implique l'existence de deux solutions différentes pour l'équation étudiée lorsque les conditions initiales données sont celle du point de croisement ce qui est impossible. Les trajectoires dans le plan de phase ne se croisent pas.

<sup>a</sup>. C'est-à-dire autant de conditions initiales que l'ordre de l'équation.

**Le cas de l'oscillateur harmonique** On a montré au paragraphe précédent que l'énergie se conservait, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cste} = \frac{1}{2}m\dot{x}_0 + \frac{1}{2}kx_0^2.$$

En d'autres termes, on a

$$x^2 + \frac{\dot{x}}{\omega_0^2} = \frac{2E_m}{k},$$

qui correspond à l'équation d'un cercle en les variables  $(x, \dot{x}/\omega_0)$  ou d'une ellipse si on reste dans les variables  $(x, \dot{x})$ . Le rayon est  $2E_m/k$  qui dépend des conditions initiales !

**Cas des oscillateurs amortis** Dans ces cas le calcul est long et franchement peu instructif. On peut en revanche réfléchir qualitativement au tracé des portraits de phase.

**Remarque**

À ce sujet, je recommande la lecture du BUP *Le portrait de phase des oscillateurs*.

**5.5 Exercices****Exercice n°33 : Oscillations d'un bouchon**

On considère un bouchon en liège, cylindrique de hauteur  $h$ , de section  $S$  et de masse volumique  $\rho_l = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Ce bouchon flotte verticalement dans l'eau de masse volumique  $\rho_e$ . Dans un exercice précédent on a déterminé l'enfoncement d'équilibre du bouchon  $z_{\text{eq}} = h \rho_l / \rho_e$ .

Alors que le bouchon est dans cette position, un observateur vient enfoncer le bouchon dans l'eau de  $z_0$ . Déterminer la période des oscillations observées (on néglige les frottements fluides).

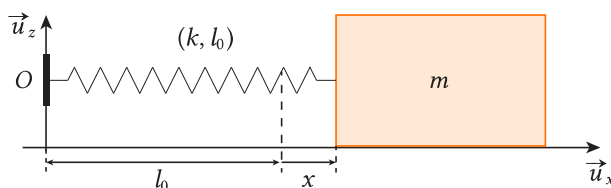
**Exercice n°34 : Viscosimètre à bille oscillante**

Une sphère de masse  $m$  et de rayon  $r$  est suspendue verticalement à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Elle se déplace dans un liquide de viscosité  $\eta$ , qui génère une force de frottements fluides décrite par la formule de Stokes :  $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$ .

1. Donner l'équation du mouvement de la sphère en négligeant l'effet du poids.
2. À quelle condition sur  $\eta$  a-t-on des oscillations ?
3. Donner la pseudo-période  $T$  des oscillations.
4. Dans l'air, sans frottements, la période des oscillations vaut  $T_0$ . En déduire  $\eta$  en fonction de  $m, r, T, T_0$ .

**Exercice n°35 : Oscillateur amorti par frottements solides**

On considère la situation suivante : un mobile parallélépipédique de masse  $m$  est posé sur un plan immobile et relié à un point de fixation par un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$ . Le contact entre le solide et le plan est caractérisé par un coefficient de frottement  $f$  (on identifie  $f_s$  à  $f_d$  dans ce problème). La position du mobile est repérée par l'abscisse  $x$  du point d'attache du ressort.



1. **Première phase du mouvement** : à l'instant initial  $t = 0$ , le mobile est écarté de sa position d'équilibre  $x = 0$  et placé en  $x_0 > 0$ .
  - a. Quelles sont les forces qui s'exercent sur lui ? Caractériser notamment leur direction et sens puis établir les équations du mouvement.
  - b. À quelle(s) condition(s) le mobile reste-t-il immobile ? En déduire le critère d'arrêt de l'oscillateur. On notera  $p = fmg/k$ .
  - c. Dans le cas où le mobile se met en mouvement, caractériser la force de frottement et écrire l'équation du mouvement sur la direction horizontale. Expliquer que la solution est

$$x(t) = (x_0 - p) \cos(\omega_0 t) + p.$$

2. **Suite et fin des oscillations** : À la fin de cette première oscillation le solide se trouve en  $-x_0 + 2p$  avec une vitesse nulle. Que peut-il se passer ? En particulier si le mouvement est possible, le caractériser.

3. Représenter dans le plan  $(t, x)$  la trajectoire de l'oscillateur jusqu'à son arrêt complet.
4. **Enveloppe des oscillations** : montrer par le calcul que l'enveloppe des oscillations de l'oscillateur amorti par frottements solides est linéaire. Comparer au cas de l'amortissement par frottements fluides.
5. **Portrait de phase** : représenter en expliquant la démarche le portrait de phase de cet oscillateur.

### Exercice n°36 : Étude d'un oscillateur à partir de son portrait de phase

Un point matériel  $M$  de masse  $m = 300$  g est astreint à se déplacer sans frottements solides le long d'un axe  $Ox$  horizontal. Il est soumis aux forces suivantes :

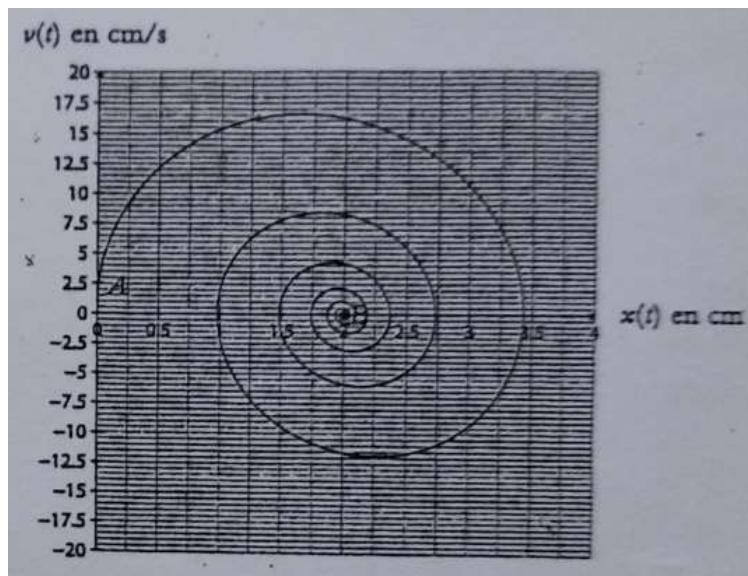
- la force de rappel d'un ressort d'axe  $Ox$ , de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ ,
- une force de frottement fluide, linéaire, caractérisée par un coefficient de frottement  $\alpha$ ,
- une force constante d'origine inconnue  $\vec{F}_c = F_c \vec{u}_x$ .

1. Établir l'équation du mouvement de  $M$  et la mettre sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \quad \text{où } x \text{ représente l'allongement du ressort.}$$

Les grandeurs  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $X_0$  sont à exprimer en fonction des données.

2. Dans le cas d'une solution pseudo-périodique, exprimer  $x(t)$  : on définira le temps caractéristique  $\tau$  et la pseudo-pulsation  $\Omega$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .
3. On donne sur la figure une trajectoire de phase du système. On souhaite en déduire la valeur numérique de différents paramètres de l'oscillateurs



- a. Quel est le type de mouvement ?
- b. Déterminer la vitesse  $\dot{x}$  et l'allongement du ressort  $x$  au début et à la fin du mouvement.
- c. Déterminer la vitesse maximale atteinte ainsi que l'allongement maximal.
- d. On donne les différentes dates correspondant aux croisements de la trajectoire de phase avec l'axe des abscisses :

$t$ (s)	0,31	0,65	0,97	1,3	1,62
---------	------	------	------	-----	------

En déduire la pseudo-période  $T$  et la pseudo-pulsation  $\Omega$ .

e. On définit le décrément logarithmique par

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x(t) - x_B}{x(t + nT) - x_B} \right).$$

Exprimer  $\delta$  en fonction de  $T$  et  $\tau$ . Déterminer graphique  $\delta$  et en déduire  $\tau$ .

f. Déduire des questions précédentes les valeurs numériques du facteur de qualité  $Q$  et de la pulsation propre  $\omega_0$ .

g. Déterminer enfin la raideur du ressort  $k$ , le coefficient de frottements  $\alpha$  et la valeur de la force  $F_c$  sachant que  $l_0 = 1,0$  cm.





## Chapitre 6

# Oscillateurs en régime forcé - Résonance

### Remarque

La notion de résonance est présentée ici par son aspect mécanique. Vous l'étudierez en détail (et *en live*) dans le cours d'électrocinétique mais la physique sous-jacente, les calculs et interprétations sont identiques. En somme, il sera intéressant de la découvrir par deux points de vue que vous pourrez confronter. Par manque de temps nous ne rentrerons pas dans le détail en TD mais libre à vous de lire ce chapitre à un moment de votre préparation.

Le système étudié est un système masse ressort amorti par frottements fluides déjà largement commenté jusqu'ici. Cependant nous en modifions les conditions initiales. Contrairement à ce qui était fait précédemment, le mobile est lâché sans vitesse initiale et en  $X = l_0$  mais c'est l'autre extrémités  $y$  du ressort qui est agitée selon  $y(t) = F(t)$  où  $F$  est une fonction quelconque.

### 6.1 Mise en équation

Le frottement exercé sur la masse  $m$  est modélisé par une force  $\vec{F}_{\text{frott}} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{X} \vec{u}_x$ . À un instant donné, la longueur du ressort égale la position de la masse moins celle de l'extrémité du ressort  $X(t) - y(t)$ . Ainsi, par application du PFD à la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, projeté sur  $\vec{u}_x$  :

$$m\ddot{X} = -\lambda\dot{X} - k(X - F(t) - l_0),$$

que l'on réécrit en mettant le termes comportant  $X$  d'un côté et le reste de l'autre. On introduit de plus la nouvelle variable  $x = X - l_0$ <sup>1</sup> :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = F(t),$$

que l'on peut réécrire sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad \text{ou} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}. \quad (6.1)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants mais non-homogène<sup>2</sup>. La résolution consiste à trouver une solution de l'équation homogène associée et une solution particulière de l'équation totale. Les solutions générales s'obtiennent par composition linéaire des deux. Si la résolution de l'équation

1. En toute rigueur c'est  $kF(t)$  qui apparaît dans le terme de droite mais à une redéfinition de  $F$  prêt on peut le noter simplement  $F(t)$ .

2. Elle est LINÉAIRE car si  $x$  et  $y$  sont solutions,  $x + y$  l'est aussi. L'ordre 2 est celui de la dérivée de plus haut rang. L'inconnue est une fonction de  $t$  dont ne dépendent pas les coefficients de l'équation (qui sont des paramètres du problème ici). Enfin, une équation différentielle est dite homogène lorsque son second membre (celui ne comportant pas de  $x$ ,  $\dot{x}$ , etc.) est nul ce qui n'est pas le cas ici du fait de l'excitation.

homogène est simple (on a eu l'occasion de la mener à plusieurs reprises), trouver une solution particulière lorsque  $F$  a une forme exotique peut s'avérer franchement compliqué. La résolution du problème repose ainsi sur la décomposition en série de Fourier.

## 6.2 Série de Fourier et méthode complexe

### 6.2.1 Développement en série de Fourier

L'objet de ce paragraphe repose sur le théorème suivant : *toute fonction périodique de pulsation  $\omega$  peut s'écrire comme la somme discrète (éventuellement infinie) de sinus ou cosinus de pulsation  $\omega$  et ses multiples*. On parle de DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER<sup>3</sup> et on peut écrire :

$$f_{\text{de pulsation } \omega}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

En pratique cette méthode demande un effort important : calculer les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  mais heureusement nous ne serons jamais confronté à cette question et cette écriture nous servira simplement, d'un point de vue théorique, à justifier l'étude qui suit. En effet, ce résultat permet une simplification de l'équation (6.1) : si pour une équation linéaire donnée on connaît la solution pour un forçage sinusoïdal, par somme et en ajustant avec les bons coefficients on trouve la réponse pour un forçage quelconque<sup>4</sup>.

On retient donc que, *pour un système linéaire*, il suffit de connaître la réponse à l'excitation simple  $A \sin(\omega t)$  pour en caractériser complètement le comportement. On a donc ramener la résolution de l'équation (6.1) où  $F$  est potentiellement compliquée, à celle de l'équation plus simple suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad \text{ou} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = A \sin(\omega t). \quad (6.2)$$

En d'autres termes, on a changer le point de vue de l'étude : d'un problème qui consistait à résoudre le mouvement d'un système pour une fonction  $F$  du temps quelconque on s'est ramené à l'étude de sa réponse pour toutes les fréquences du spectre, ce qui permettra par série de Fourier de déduire la réponse temporelle initialement cherchée. On parle pour cela de *réponse fréquentielle* ou *réponse spectrale* du système.

### 6.2.2 La méthode complexe

Dès lors, pour résoudre l'équation lorsque le forçage est sinusoïdal, on peut utiliser la méthode complexe. L'idée de cette méthode est simple : le sinus (ou cosinus) est égal à la partie imaginaire (resp. réelle) de  $e^{i\omega t}$ . Ainsi, si on résout l'équation pour cette nouvelle quantité  $e^{i\omega t}$  la solution sera complexe et aura pour partie réelle la solution si le second membre est pris égal au  $\cos(\omega t)$  et pour partie imaginaire la solution si le second membre est  $\sin(\omega t)$ . Cette affirmation est vraie car les coefficients de l'équation différentielle sont réels et ne vont ainsi pas modifier le caractère « partie réelle » ou « partie imaginaire » de la résolution<sup>5</sup>.

*Quel intérêt ?* L'avantage de cette méthode repose sur le calcul simple suivant :

$$\frac{d e^{i\omega t}}{dt} = i\omega e^{i\omega t},$$

c'est-à-dire que dans ce domaine complexe la dérivation se ramène à une multiplication par  $i\omega$ . Au lieu d'une équation différentielle on aura donc à résoudre une équation algébrique, tout ce qu'il y a de plus classique, et facile ! On a en effet  $\dot{x} = i\omega x$  et  $\ddot{x} = (i\omega)^2 x = -\omega^2 x$ , de sorte que l'équation (6.2) devient :

$$-\omega^2 x + \frac{\omega_0}{Q} i\omega x + \omega_0^2 x = A. \quad (6.3)$$

3. Lorsque la fonction en question n'est pas périodique, on peut lui appliquer la transformation de Fourier qui permet de l'écrire comme l'intégrale (continue) de fonction trigonométrique.

4. Si le forçage quelconque est périodique la somme est discrète, dans le cas contraire il faudra passer à l'intégrale.

5. En d'autres termes du fait que les coefficients ne fassent pas intervenir  $i$  implique que ce qui est de la partie réelle reste de la partie réelle et de même pour la partie imaginaire.

**Remarque**

Cette méthode permet de trouver une solution particulière de l'équation. Sa résolution complète demande de trouver aussi la solution de l'équation homogène mais celle-ci décrit le régime transitoire, et s'amortit rapidement pour ne laisser que la solution particulière. C'est donc elle qui nous intéresse pour modéliser le comportement permanent du système.

**6.3 Intuition expérimentale**

Une fois n'est pas coutume, commençons par nous demander ce que pourrait donner l'expérience (vous la ferez en TP et vérifierez que ces intuitions sont réalisées).

**À basse fréquence** l'extrémité gauche du ressort se déplace lentement. Dès qu'elle atteint une position légèrement différente le ressort s'en trouve comprimé ou étiré et agit sur la masse qui se déplace pour conserver  $l = l_0$ . Ainsi à la limite où  $\omega \rightarrow 0$  la masse décrit le même mouvement que l'excitation : amplitude donnée  $A$  et vitesse quasi nulle (d'autant plus faible que  $\omega$  est petite).

**À haute fréquence** l'inertie de la masse l'empêche d'avoir un mouvement trop rapide de sorte que quand  $\omega \rightarrow \infty$  celle-ci se trouve quasiment immobile : l'amplitude de son mouvement, comme sa vitesse, tendent vers 0.

**Aux fréquences intermédiaires** le mouvement est compliqué et dépend de l'amortissement.

Ainsi la vitesse doit tendre vers 0 à la fois lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ . À moins d'être nulle pour toute fréquence (ce qui paraît improbable), elle va nécessairement atteindre un maximum pour une pulsation  $\omega_{r,v}$  à déterminer.

En revanche, l'amplitude atteint une valeur  $A$  donnée lorsque  $\omega \rightarrow 0$  mais est nulle lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ . Deux comportements sont alors possibles : soit elle décroît strictement, soit elle atteint un maximum intermédiaire pour une fréquence  $\omega_{r,p}$  à déterminer.

Lorsque qu'en modifiant la fréquence d'excitation d'un système on observe un maximum d'une grandeur donnée on parle de RÉSONANCE. C'est la raison pour laquelle l'étude de la résonance est aussi appelé RÉPONSE FRÉQUENTIELLE par opposition à la RÉPONSE INDICIELLE qui est celle à la condition initiale  $x = x_0$  et  $\dot{x} = 0$ . Dans le cas présent (et c'est une règle assez générale), on intuite qu'une résonance en vitesse existe toujours, il s'agira d'en déterminer la pulsation, et que la résonance en position peut ou non exister. Il faudra en déterminer les conditions puis, le cas échéant, la pulsation.

**6.4 Résonance en position****6.4.1 Résolution complexe**

Un système linéaire ne pouvant en aucun faire apparaître de nouvelles fréquences dans le système, on cherche une solution à la pulsation  $\omega$  de la forme  $\underline{x}(t) = X(\omega) \exp(i\omega t)$ . On a donc  $d^n \underline{x} / dt^n = (i\omega)^n \underline{x}(t)$ . L'équation (6.1) devient après simplification par  $e^{i\omega t}$  :

$$\left( -\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2 \right) X(\omega) = F.$$

On exprime ainsi le coefficient  $X$  en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la pulsation réduite  $u = \omega / \omega_0$  :

$$X(\omega) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}} \quad \text{ou} \quad X(u) = \frac{F}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - u^2 + i \frac{u}{Q}}.$$

On constate donc numériquement un point crucial : l'expression de  $X(\omega)$ , c'est-à-dire de la réponse du système au forçage, dépend bien de la pulsation à laquelle celui-ci a été effectué. Reste à analyser cette dépendance.

### 6.4.2 Diagramme de Bode

De façon générale la réponse spectrale est de la forme  $|X| \exp(i(\omega t + \varphi))$ , où  $\varphi = \arg(X)$ . On peut donc s'intéresser à l'évolution de  $|X|(u)$  et  $\arg(X)(u)$  en fonction des valeurs de  $u$ . C'est le principe du DIAGRAMME DE BODE. Les fonctions  $|X|$  et  $\arg(X)$ , résolue numériquement, sont tracées sur la figure 6.1. La fonction  $|X|$

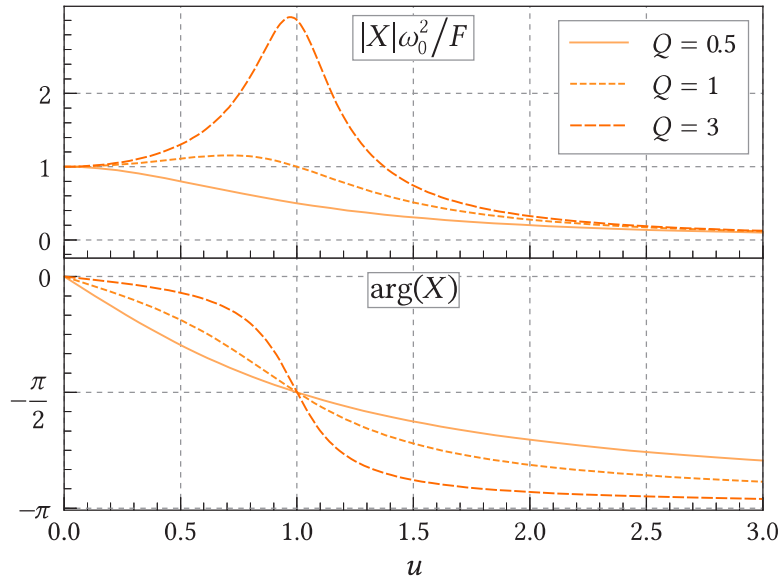


FIGURE 6.1 – Tracé de  $|X|$  et  $\arg(X)$  en fonction de  $u$ .

- décroît strictement de  $F/\omega_0^2$  à 0 si  $Q < 1/\sqrt{2}$  ;
- accepte un maximum en  $u = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$  si  $Q > 1/\sqrt{2}$ .

Il y a donc une résonance en position à la pulsation

$$\omega_{r,p} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

à condition que  $Q$  soit suffisamment grand ( $Q > 1/\sqrt{2}$ ) c'est à dire que le système ne soit pas trop amorti. Dans ce cas, la valeur maximale de  $|X|\omega_0^2/F$  est

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}.$$

## 6.5 Résonance en vitesse

Il peut s'avérer que la grandeur d'intérêt ne soit pas directement  $x$  mais  $v(t) = dx/dt$ . Or on a  $dx/dt = i\omega X(\omega) \exp(i\omega t)$  d'où  $V(\omega) = i\omega X(\omega)$ . On a donc

$$V(u) = \frac{F}{\omega_0} \frac{i u}{1 - u^2 + i u/Q} = \frac{FQ}{\omega_0} \frac{1}{1 + iQ \left( u - \frac{1}{u} \right)}.$$

De même que précédemment, on étudie les fonctions  $|V|$  et  $\arg(V)$ . Celles-ci sont tracées sur la figure 6.2 qui permet de constater que la fonction  $|V|$  possède un maximum en  $u = 1$  (i.e.  $\omega = \omega_0$ ) quelle que soit la valeur de  $Q$ . En  $u = 1$ , on trouve  $V = FQ/\omega_0$ . On a donc de nouveau une résonance.

Plusieurs commentaires importants s'imposent :

- la résonance en vitesse, contrairement à celle en position, existe quelle que soit la valeur de  $Q$  ;

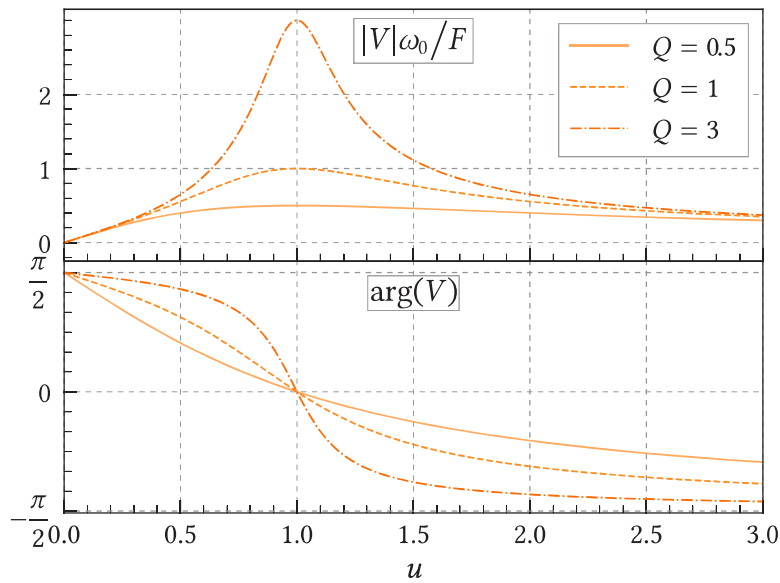


FIGURE 6.2 – Tracé de  $|V|$  et  $\arg(V)$  en fonction de  $u$ .

- contrairement à la résonance en position, la fréquence de résonance est indépendante du facteur de qualité  $Q$  puisqu'elle est toujours égale à la fréquence propre du système ;
- lors de la résonance, on a  $\arg V = 0$ , c'est-à-dire que l'excitation et la réponse sont *en phase* ;
- même si la position du pic de résonance ne dépend pas de  $Q$ , sa hauteur et sa largeur en dépendent. Notamment, la bande passante du pic, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de  $u$  telles que  $|V| > |V|_{\max}/\sqrt{2}$  a pour largeur  $\Delta u = 1/Q$ .

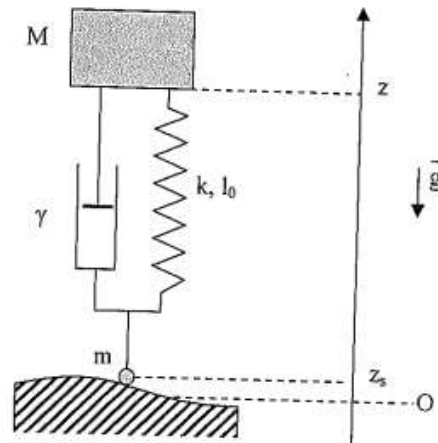
### 6.6 Exercice d'application

On propose un exercice type que vous pourriez recroiser à un moment ou un autre du concours.

#### Exercice n°37 : Étude d'une suspension de voiture

On modélise la suspension d'un véhicule par le schéma ci-contre. La liaison entre une masse  $M$ , d'altitude  $z$  et le sol se fait par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide  $l_0$ , de raideur  $k$  et de masse négligeable. À l'extrémité inférieure du ressort le contact avec le sol se fait par l'intermédiaire d'une petite masse  $m < M$ . Ces deux masses sont assimilées à des points matériels.

On ajoute en parallèle du ressort de suspension un amortisseur qui exerce sur la masse  $M$  une force de frottements visqueux de la forme  $\vec{F} = -\gamma \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$  où  $l = z - z_s$  est la longueur instantanée du ressort et  $\gamma$  une constante positive.



1. La vibration verticale du sol a pour élongation :  $\vec{z}_s(t) = z_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ .

a. En supposant que la masse  $m$  reste au contact du sol, montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de  $M$  s'écrit sous la forme

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2(z - l_1) = \frac{1}{\tau} \dot{z}_s + \omega_0^2 z_s$$

où  $\omega_0$ ,  $\tau$  et  $l_1$  sont des constantes à déterminer.

b. On se place en régime sinusoïdal forcé; c'est-à-dire qu'on suppose le régime transitoire achevé. On pose  $z_s = \text{Re}(\underline{z}_s)$  avec  $\underline{z}_s = z_0 e^{j\omega t}$  et  $y(t) = z(t) - l_1 = \text{Re}(\underline{y})$ .

Justifier l'utilisation de la notation complexe et expliquer la nécessité du changement de variable. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $y(t)$  puis expliciter en notation complexe l'amplitude complexe  $\underline{Y}$  de  $\underline{y}(t)$  en fonction de  $z_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\tau$ .

c. On s'intéresse à l'amplitude de vibration de  $M$  en fonction de  $\omega$ . Montrer en posant  $x = \omega/\omega_0$  que l'on peut obtenir

$$\frac{|\underline{Y}|}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + \alpha^2 x^2}{(1 - x^2)^2 + \alpha^2 x^2}}$$

$\alpha$  étant un paramètre à identifier.

2. On s'intéresse maintenant à la masse  $m$ .

a. Établir l'équation du mouvement de la masse  $m$ .

b. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{R}{M} - (1 + \beta)g = \beta \ddot{z}_s + \omega_0^2 z_s - \omega_0^2 y,$$

où  $\beta = m/M$  et  $R$  est un paramètre dont on précisera la dimension et la signification physique.

c. Montrer qu'en régime établi

$$\frac{R}{M} = (1 + \beta)g + A \cos(\omega t + \Phi),$$

et, en utilisant la notation complexe, déterminer l'amplitude  $A$ .

d. En déduire la condition pour que la masse  $m$  ne décolle pas du sol et montrer que cette condition se met sous la forme

$$h(x) < \frac{(1 + \beta)g}{z_0 \omega_0^2} \quad \text{où} \quad h(x) = \sqrt{\frac{(1 + \beta - \beta x^2)^2 + \alpha \beta^2 x^2}{(1 - x^2)^2 + \alpha x^2}}.$$

e. Comment doit-on choisir le paramètre  $\beta$  pour que les roues restent en contact permanent avec le sol dans le domaine des pulsations très supérieures à la pulsation propre  $\omega_0$ .

3. On considère une route imparfaitement plane, comportant une succession de bosses que l'on assimilera à une sinusoïde de période spatiale  $\lambda = 2$  m et de hauteur crête-à-crête 5 m. Le véhicule se déplace sur cette route à une vitesse  $v$  constante et sa suspension est caractérisée par une fréquence propre  $f_0 = 1,5$  Hz.

a. Expliquer pourquoi on retrouve la vibration  $\vec{z}_s(t) = z_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$  et donner la relation entre  $\omega$ ,  $\lambda$  et  $v$ .

b. On souhaite qu'un passager ne ressente pas les bosses de la chaussée. Doit-on rouler à faible ou grande vitesse? Donner une vitesse caractéristique permettant de quantifier votre réponse précédente. Est-elle réaliste?

## Chapitre 7

# Mouvement dans un champ de force central

### 7.1 Propriétés des forces centrales

#### 7.1.1 Définition

On dit qu'un point matériel est soumis à une FORCE CENTRALE lorsque cette force, en tout point  $M$ , est portée en permanence par la droite  $(OM)$ ,  $O$  étant appelé CENTRE DE FORCE. Par exemples :

#### 7.1.2 Moment d'une force centrale, conséquences

Par définition, le moment d'une force centrale par rapport au centre de force est nul :

Par application du théorème du moment cinétique, on en déduit que le moment cinétique par rapport au centre de force  $\vec{L}_O(M)$  est conservé :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{L}_O(M) = \text{csté} = \vec{L}_0.$$

Une conséquence importante de ceci est que le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est contenu dans un plan particulier de l'espace. On résume souvent : « le mouvement est plan ». En effet, comme à tout instant  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)$  est identique, et que le vecteur  $\vec{OM}$  lui est orthogonal par définition, il est contenu dans le plan orthogonal à  $\vec{L}_0$  contenant  $M$  à l'instant initial. Il s'agit aussi du plan défini par  $(\vec{r}(t=0), \vec{v}(t=0))$ .

Ceci étant acquis, on peut travailler dans le repère polaire de centre  $O$ , et exprimer  $\vec{L}_0$  :

$$\vec{L}_0 = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \quad (7.1)$$

La quantité  $C = r^2 \dot{\theta}$  est donc conservée, on l'appelle **CONSTANTE DES AIRES**.

Enfin, le signe de  $C$  étant constant il est imposé par les conditions initiales, et est le même que celui de  $\dot{\theta}$ . On en déduit que le mouvement de rotation autour de  $O$  se fait toujours dans le même sens.

## 7.2 Forces centrales conservatives

On peut en dire encore un peu plus dans le cas des forces centrales conservatives, dérivant d'une énergie potentielle. Ceci nous mènera naturellement à l'étude des mouvements planétaires (potentiel gravitationnel).

### 7.2.1 Conservation de l'énergie, énergie potentielle effective

L'énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force centrale conservative est bien entendu conservée. Il faut noter que par définition du gradient, l'énergie potentielle ne peut dépendre que la coordonnée radiale  $E_p(r)$  sans quoi  $\vec{F}$  aurait une composante selon un des deux autres des vecteurs de base ce qui est interdit par le caractère central de la force. On peut alors écrire :

Ainsi,  $E_m$  est la somme d'un terme qui ne dépend que de  $r$ , noté  $E_{p,\text{eff}}(r)$  et appelée **ÉNERGIE POTENTIELLE EFFECTIVE** et d'un terme cinétique nécessairement positif  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 > 0$ . Cela contraint énormément les trajectoires possibles!



**7.2.2 Diagramme d'énergie, trajectoires**

## 7.3 Forces centrales newtonienne

### 7.3.1 Définition

Une FORCE CENTRALE NEWTONIENNE est de la forme  $\vec{F} = -k/r^2 \vec{u}_r$  où  $k$  est une constante.

- Si  $k > 0$ ,
- Si  $k < 0$ ,

Les forces centrales newtoniennes sont conservatives et dérivent d'une énergie potentielle  $E_p = -k/r + \text{cste}$  et la constante est généralement prise nulle de sorte que l'énergie potentielle s'annule à l'infini.

On a déjà rencontré deux forces centrales newtoniennes :

### 7.3.2 Diagramme énergétique

Pour une force centrale newtonienne, l'énergie potentielle effective s'écrit :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}.$$

On peut donc tracer les diagrammes énergétiques et interpréter les trajectoires accessibles.

Dans le cas attractif :

Dans le cas répulsif :

## 7.4 Mouvements d'un point matériel dans un champ de force central newtonien

### 7.4.1 Différents mouvements possibles

Les mouvements sont des CONIQUES (courbes obtenues par intersection d'un plan et d'un cône : ellipse et cercle, parabole et hyperbole) d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

où  $p$  est le PARAMÈTRE de la conique et  $e$  son EXCENTRICITÉ.

Les trajectoires sont classées d'après leur excentricité. On distingue ainsi :

- $e > 1$  : le mouvement n'est pas borné, il s'agit d'une trajectoire hyperbolique.
- $e = 1$  : le mouvement est parabolique (cas limite).
- $e < 1$  : le mouvement est borné  $r \in [r_1, r_2]$ , la trajectoire est elliptique. Le cas limite est  $e = 0$ , il s'agit d'une trajectoire circulaire.

Les démonstrations ne sont pas cruciales mais je vous conseille de les refaire une fois pour vous entraîner « au cas où » ...

**Démonstration par la méthode de Binet** Cette première méthode est un changement de variables appelé FORMULE DE BINET et consiste à écrire l'équation du mouvement en fonction de  $u = 1/r$ . Supposons que l'on peut paramétriser la trajectoire sous la forme  $r = r(\theta)$ .<sup>1</sup> On a alors

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}.$$

Réécrivons l'équation du mouvement à l'aide de cette nouvelle fonction  $u(\theta)$ . On commence par réécrire le terme d'accélération :

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \right) \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right).$$

On reconnaît la quantité  $C = r^2 \dot{\theta} = \dot{\theta}/u^2$  de sorte que :

$$\ddot{r} = -C \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = -C \dot{\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

1. Ceci est rendu possible par l'égalité  $L_O dt = mr^2 d\theta$ . Dans le cas général cette nouvelle paramétrisation pose problème car elle n'est pas bijective : à une valeur de  $t$  peuvent correspondre plusieurs valeurs de  $\theta$  (par exemple dans le cas d'une spirale). On peut voir  $\theta \in [0, 2\pi]$  comme une fonction multivaluée de  $t$ , ou plus simplement considérer que l'on dispose d'un changement de variable bijectif envoyant  $t \in ]-\infty, +\infty[$  dans  $\theta \in ]-\infty, +\infty[$ .

Ainsi, en utilisant de nouveau la constante  $C$ , le membre de gauche de l'équation du mouvement sur  $\vec{u}_r$  s'écrit

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - C^2 u^3 = -C^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right).$$

L'équation du mouvement devient alors simplement

$$-mC^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -ku^2, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mC^2}}.$$

Il s'agit simplement de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation 1 et de position d'équilibre  $k/mC^2$  ! L'expression des solutions est immédiate :

$$u(\theta) = \frac{k}{mC^2} + \alpha \cos(\theta - \theta_0) \quad \text{d'où} \quad r = \frac{1}{u} = \frac{\frac{mC^2}{k}}{1 + \frac{\alpha mC^2}{k} \cos(\theta - \theta_0)}.$$

où  $\alpha$  et  $\theta_0$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales. On reconnaît l'équation d'une conique dont l'interprétation sera détaillée plus loin

**Démonstration par le vecteur de Runge-Lenz** L'équation de la trajectoire peut aussi être obtenue en faisant appel au vecteur de Runge-Lenz  $\vec{A}$  défini par

$$\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L}_O - k\vec{u}_r.$$

Le moment cinétique  $\vec{L}_O$  étant constant, donc de dérivée nulle, on démontre que le vecteur de Runge-Lenz est lui-même conservé :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_O - k \frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{k}{mr^2} \vec{u}_r \wedge mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z - k\dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0}.$$

On a donc identifié une *troisième intégrale du mouvement*, après  $E_m$  et  $\vec{L}_O$ .

Il est finalement possible d'obtenir l'équation de la trajectoire en écrivant

$$\vec{A} \cdot \vec{u}_r = (\vec{v} \wedge \vec{L}_O) \cdot \vec{u}_r - k = (\vec{u}_r \wedge \vec{v}) \cdot \vec{L}_O - k = \frac{mC^2}{r} - k.$$

En choisissant l'axe  $Ox$  comme étant orienté par  $\vec{A}$  (ce qui est possible car  $\vec{A}$  est constant) et en notant  $\theta$  l'angle entre  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_x$ , on a  $\vec{A} \cdot \vec{u}_r = A \cos \theta$  avec  $A = \|\vec{A}\|$ . Il vient

$$A \cos \theta = \frac{mC^2}{r} - k \quad \text{puis} \quad r = \frac{\frac{mC^2}{k}}{1 + \frac{A}{k} \cos \theta}.$$

On observe que l'on retrouve la même équation de trajectoire que celle obtenue par la méthode de Binet avec  $A = \alpha mC^2$  et  $\theta_0 = 0$  (ce qui s'explique par le choix d'axe  $Ox$  fait ici).

## 7.4.2 Cas simple de la trajectoire circulaire

**Vitesse sur l'orbite** Dans ce cas simple le PFD suffit à démontrer tous les résultats utiles puisque  $\dot{r} = 0$ . Comme  $\vec{a} = r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ , le PFD s'écrit

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{e}_r & -mr_0 \dot{\theta}^2 = -k/r_0^2 \\ \text{sur } \vec{e}_\theta & mr_0 \ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$

De la seconde équation on déduit  $\dot{\theta} = \text{cste}$  que l'on peut exprimer grâce à la première équation

$$\dot{\theta} = \frac{k/m}{r_0^3} \quad \text{puis} \quad v^2 = r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{k/m}{r_0} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{k}{mr_0}}}.$$

**Énergie mécanique associée** L'énergie mécanique dans le cas circulaire s'obtient aisément :

Trouver une valeur négative n'est pas surprenant puisqu'on étudie une *trajectoire liée*.

**Période de révolution** Enfin, la période de révolution est

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{k/mr_0} \quad \text{donc} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} r_0^3.$$

C'est une première apparition de la troisième loi de Kepler,  $T^2/a^3 = \text{cste}$ .

#### Exercice n°38 : Première vitesse cosmique

On s'intéresse au cas particulier de l'interaction gravitationnelle.

1. Quelle est la vitesse d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude  $h$ ? En déduire l'expression et la valeur numérique de la PREMIÈRE VITESSE COSMIQUE, vitesse d'un satellite en orbite au niveau du sol.
2. Quelle est la période de révolution d'un satellite en orbite circulaire à l'altitude  $h$ ? Que vaut alors la période d'un satellite en orbite rasante (à l'altitude  $h = 0$ ). En déduire aussi l'altitude de l'orbite géostationnaire pour laquelle  $T = 86\,164$  s.

#### 7.4.3 Cas réaliste des trajectoires elliptiques

En réalité les corps décrivent très rarement des trajectoires circulaires mais plutôt des ellipses. C'est notamment le cas des astres, et en particulier des planètes autour du soleil. En orientant correctement les coordonnées polaires on a  $r = p/(1 + e \cos \theta)$  et on définit deux points particuliers, le PÉRICENTRE P (périhélie pour les satellites solaires, périgée pour les satellites terrestres) et l'APOCENTRE A (apohélie et apogée respectivement).

On note  $a$  le demi-grand axe de l'ellipse

$$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2}.$$

À nouveau l'énergie mécanique est conservée et vaut  $E_m = -k/2a$ . C'est l'analogie du cas circulaire  $E_{m,c} = -k/2r_0$  et la démonstration dans ce cas est sans intérêt.

On en déduit l'expression de la vitesse :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2a} \Rightarrow v^2 = \frac{2k}{m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right).$$

Noter bien que la vitesse n'est pas constante sur l'ellipse !

## 7.5 Lois de Kepler

Les lois de Kepler consistent essentiellement à appliquer les résultats que nous avons montré précédemment au cas de la gravitation :

**Première loi de Kepler** Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe un des foyers. C'est dû au caractère central du champ de force et au fait que les trajectoires sont liées.<sup>2</sup>

**Deuxième loi de Kepler** Le rayon vecteur soleil-astre balaye des aires égales en des durées égales. C'est la *constante des aires*  $r\dot{\theta}^2$ .

**Troisième loi de Kepler**  $T^2/a^3$  prend une même valeur pour tous les astres du système solaire quelles que soient leur masse ou leur trajectoire fermée.

### Exercice n°39 : Satellite géostationnaire

Un satellite est géostationnaire si sa trace reste en permanence immobile dans le référentiel de la Terre  $\mathcal{R}$ . Montrer, en utilisant les 3 lois de Kepler, adaptée au système Terre-satellite, que cette condition détermine entièrement les éléments de l'orbite (période, nature de la trajectoire, altitude, plan de l'orbite). Faire les applications numériques.

1. Montrer qu'un tel satellite ne permet pas d'établir des communications avec des points de la Terre situés trop au nord ou trop au sud et calculer la latitude  $\lambda_1$  limite.

Données :

- période de la rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique :  $T_0 = 86\,164$  s ;
- rayon de la Terre, assimilée à une sphère de centre  $O$  :  $R = 6370$  km ;
- constante de gravitation multipliée par la masse de la Terre :  $\mathcal{G}\mathcal{M}_T = 3,986.10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 7.6 Étude des états de diffusion

**Trajectoire parabolique** La trajectoire parabolique correspond au cas  $E_m = 0$  dont on déduit immédiatement  $v = \sqrt{2k/mr}$ .

### Exercice n°40 : Seconde vitesse cosmique

Déterminer la vitesse minimale à communiquer à un corps posé à la surface de la terre pour qu'il se libère complètement de son attraction. On parle de VITESSE DE LIBÉRATION OU SECONDE VITESSE COSMIQUE.

<sup>2</sup>. Le fait que les trajectoires soient fermées est dû au théorème de Bertrand : Cela ne peut arriver que dans le cas newtonien ou dans le cas harmonique.

**Trajectoire hyperbolique** Ces trajectoires sont très rarement étudiées. Donnons simplement deux exemples graphiques :

## 7.7 Ouverture : Généralisation au problème à deux corps

La situation où un point matériel est soumis à une force centrale dirigée vers un point fixe peut paraître réductrice (ne concerner, en gros, que des cas d'école). En effet, on sait que, même si son mouvement est faible, le Soleil a aussi un léger mouvement de révolution pendant que la Terre lui tourne autour. On va donc montrer qu'on peut ramener le problème à deux corps à la situation étudiée dans les paragraphes précédents.

Soit donc deux points  $(M_1, m_1)$  et  $(M_2, m_2)$  uniquement en interaction gravitationnelle mutuelle. Soit  $O$  un point fixe dans le référentiel d'étude. On applique le PFD aux deux points pour obtenir

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3} \overrightarrow{M_1 M_2}.$$

On peut réaliser la somme et la différence de ces deux équations. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}) &= \vec{0} \\ \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} &= -\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \end{aligned}$$

La première relation traduit le fait que le système de deux points matériels est en réalité isolé, donc sa quantité de mouvement se conserve. Le mouvement du centre de masse  $m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}$  est donc une translation rectiligne uniforme. De ce fait, la deuxième relation peut se réécrire en posant  $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ ,  $M = m_1 + m_2$  et  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{\mu M}{r^3} \vec{r}.$$

Tout se passe alors comme si une particule fictive de masse  $\mu$ , appelée MASSE RÉDUITE était soumise à une unique force gravitationnelle centrale par un astre immobile de masse  $M$ . On peut en déduire la trajectoire de la particule fictive, puis en inversant les relations celles des deux particules réelles.

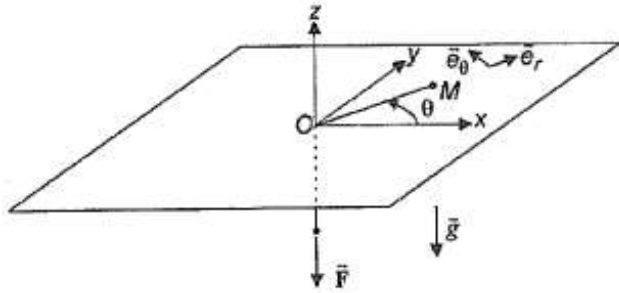
## 7.8 Exercices complémentaires

### Exercice n°41 : Masse approximative d'une galaxie

En périphérie d'une Galaxie, une étoile située a été observé. Elle décrit une orbite circulaire de rayon  $a = 3.10^{17}$  km à la vitesse  $v_0 = 250$  km/s. Évaluer l'ordre de grandeur de la masse de la galaxie.

### Exercice n°42 : Mouvement quasi-circulaire

On étudie un point matériel  $M$  de masse  $m$  qui glisse sans frottement sur un plan horizontal de centre  $O$  où un trou a été percé. Une corde sans masse passant dans le trou en  $O$  relie  $M$ . Un opérateur la tire lentement vers le bas le long de l'axe vertical ( $Oz$ ).



À un instant  $t_0$  choisi comme origine,  $M$  se trouve à la distance  $r_0$  de  $O$  et est lancé sur le plan avec une vitesse initiale purement orthoradiale de module  $v_0$ .

On suppose la traction suffisamment lente pour que le mouvement de  $M$  soit quasi-circulaire à chaque instant et on s'intéresse à un instant  $t$  quelconque du mouvement où  $M$  se trouve à la distance  $r$  de  $O$  avec une vitesse  $v$ .

1. En utilisant le théorème du moment cinétique déterminer le lien entre  $v$ ,  $r$ ,  $v_0$  et  $r_0$ .
2. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer le travail  $W_{op}$  fourni par l'opérateur entre  $t_0$  et  $t$ .

### Exercice n°43 : Interaction ion-molécule

On étudie une molécule de masse  $m$ , assimilée à un point matériel  $M$ , qui se déplace au voisinage d'un gros ion supposé fixe en un point  $O$ ; celui-ci joue le rôle de centre attracteur : il exerce sur  $M$  une force qui s'écrit, en coordonnées sphériques de centre  $O$  :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^3} \vec{u}_r, \quad \text{avec } K > 0.$$

À un instant  $t_0$  choisi comme origine,  $M$  passe à la distance  $a$  de  $O$  avec une vitesse purement orthoradiale (c'est-à-dire selon  $\vec{u}_\theta$ ) de module  $v_0$ . On souhaite étudier qualitativement le mouvement en fonction de la vitesse  $v_0$ .

1. Démontrer que le mouvement est plan et qu'il suit la loi des aires. Déterminer la constante des aires  $C$  en fonction des données.
2. Démontrer que la force d'interaction est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée.
3. Démontrer que le mouvement radial de  $M$  obéit à une équation de la forme

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E_0.$$

Exprimer  $U_{\text{eff}}$  et  $E_0$  en fonction des données et en rappeler leur signification.

4. Tracer  $U_{\text{eff}}$  en distinguant, le cas échéant, selon la valeur de  $v_0$  puis, par un raisonnement graphique, tracer l'allure de la trajectoire de  $M$  à partir de l'instant  $t_0$ . Obtient-on un état lié ou un état de diffusion ?

Dans la suite on s'intéresse au cas particulier où  $v_0 = 2\sqrt{K/3ma^2}$ .

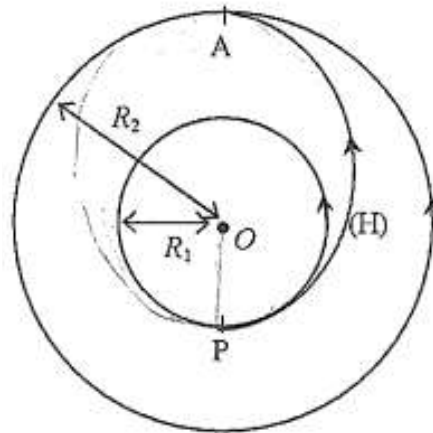


**Exercice n°44 : Transfert d'orbite de Hohmann**

On étudie le transfert d'un satellite depuis une orbite circulaire basse de rayon  $R_1$  vers une orbite circulaire plus grande, de rayon  $R_2$ .

Ce transfert s'effectue suivant une trajectoire ( $H$ ) elliptique appelée *trajectoire de Hohmann*, qui est tangente aux deux orbites circulaires à la fois (voir figure).

Afin de réaliser le changement de trajectoire en  $P$  puis en  $A$ , un dispositif de propulsion embarqué à bord du satellite est activé pendant une durée très brève, que l'on pourra négliger. On note  $\mu = \mathcal{G}M_T$ .



1. On note  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses des satellites sur les trajectoires de rayon  $R_1$  et  $R_2$  respectivement. Exprimer ces vitesses en fonction de  $\mu$  et des rayons.

Sachant que le satellite est à l'altitude  $h = 210$  km sur la première orbite et qu'il est géostationnaire sur la seconde, calculer numériquement  $v_1$  et  $v_2$ .

2. Indiquer qualitativement comment les module et direction de la vitesse doivent être modifiées au point  $P$  puis au point  $A$  pour réaliser le transfert souhaité.

3. On note  $v'_1$  et  $v'_2$  les vitesses respectives du satellite en  $P$  et  $A$  sur la trajectoire elliptique. Exprimer ces vitesses en fonction de  $\mu$  et des rayons.

4. Calculer numériquement les variations de vitesse  $\Delta v$  et  $\Delta v'$  que l'on doit imposer en  $P$  et en  $A$ .

5. Exprimer en fonction de  $\mu$  et des rayons, puis calculer en heures et minutes, la durée du transfert sur l'orbite de Hohmann.



# Chapitre 8

## Changement de référentiels

Les lois de Newton, rappelées au chapitre 2, mettent en évidence le caractère privilégié des référentiels *galiléens*, dans lesquels le principe d'inertie est vérifié et où on peut écrire le principe fondamental de la dynamique. Si la première loi de Newton postule l'existence d'un référentiel galiléen, rien ne précise comment trouver « ce » référentiel.

En pratique, il suffit de supposer qu'il existe un référentiel galiléen (et donc une infinité, reliés entre eux par la transformation de Galilée), puis d'établir les lois de transformation cinématiques lorsqu'on change de référentiel.

### 8.1 Changements de référentiel

#### 8.1.1 Situation d'étude

Rappelons qu'un référentiel correspond à la donnée d'un solide<sup>1</sup> et d'une horloge. Cet ensemble permet de repérer des *événements* en leur attribuant une position et un instant.

Dans tout ce chapitre, nous chercherons à décrire le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans différents référentiels :

- le référentiel fixe  $\mathcal{R}$ , auquel on associe le repère cartésien  $(Oxyz)$ ,
- le référentiel mobile  $\mathcal{R}'$ , auquel on associe le repère cartésien  $(O'x'y'z')$ .

Ces repères cartésiens de référence seront appelés « repères liés » aux référentiels, et sont parfois confondus avec les référentiels. Le point  $O$  est, par définition, fixe dans  $\mathcal{R}$ , tandis que  $O'$  est fixe dans  $\mathcal{R}'$ .

Comme depuis le début de ce cours de mécanique, on décrit la position du point  $M$  dans  $\mathcal{R}$  par le vecteur  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ , et dans  $\mathcal{R}'$  par  $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z$ .

Concernant le temps, un postulat fondamental de la mécanique newtonienne est celui du *caractère absolu du temps* :

En mécanique classique, le temps est une quantité absolue, indépendante du référentiel :

$$t' = t.$$

---

1. Un solide correspond ici à un ensemble de points dont les distances relatives sont invariantes au cours du temps, sans former forcément un « véritable » solide.

Cette universalité du temps est spécifique à la mécanique *classique*, et sera remise en cause en théorie de la relativité.

Cette hypothèse (conforme à l'intuition que l'on a du temps) étant admise, nous pouvons préciser le sens des dérivées temporelles dans chaque référentiel. Ainsi, la vitesse de  $M$  vaut respectivement :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z, \quad \text{et} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left( \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'\vec{u}'_x + \dot{y}'\vec{u}'_y + \dot{z}'\vec{u}'_z.$$

L'indice  $\mathcal{R}$  signifie que la dérivée est prise *dans le référentiel*  $\mathcal{R}$ , donc en considérant les vecteurs de base du repère lié  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  constants. Réciproquement, lorsqu'on dérive dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , ce sont  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$  et  $\vec{u}'_z$  qui sont considérés constants. L'accélération vaut de même :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left( \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \left( \frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'}.$$

### Remarque

Il ne faut pas confondre *repère* et *référentiel*! Les repères cartésiens représentés plus haut ne sont qu'un exemple de base de projection. On peut aussi utiliser des coordonnées cylindriques ou sphériques pour décrire le mouvement d'un point  $M$  (auquel cas les vecteurs unitaires dépendent du temps) et ce que l'on travaille dans  $\mathcal{R}$  ou dans  $\mathcal{R}'$ .

Dans la suite,  $\mathcal{R}$  sera supposé *galiléen*. On sait donc décrire la dynamique de  $M$  dans ce référentiel grâce aux lois de Newton rappelées au chapitre 2. Le caractère galiléen de  $\mathcal{R}'$  n'est pas acquis

### 8.1.2 Formule de dérivation vectorielle

De manière générale, le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  se décompose en :

- une translation instantanée, que l'on peut décrire par le mouvement de n'importe quel point fixe de  $\mathcal{R}'$  (par exemple  $O'$ ),
- une rotation instantanée, correspondant au changement d'orientation des vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$  et  $\vec{u}'_z$  dans  $\mathcal{R}$ .

On définit ainsi le VECTEUR ROTATION  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  (« rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  ») tel que

$$\left( \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}'_x, \quad \text{idem pour } y' \text{ et } z'.$$

Ce mouvement général étant décrit, on peut obtenir la formule suivante, très utile, reliant la dérivée d'un vecteur  $\vec{A}$  dans les deux référentiels<sup>2</sup> :

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}}. \quad (8.1)$$

### Remarque

*Démonstration.* On écrit  $\vec{A} = a'_x\vec{u}'_x + a'_y\vec{u}'_y + a'_z\vec{u}'_z$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , ces vecteurs sont constants, d'où :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \frac{da'_x}{dt}\vec{u}'_x + \frac{da'_y}{dt}\vec{u}'_y + \frac{da'_z}{dt}\vec{u}'_z.$$

2. Dans la mesure où la notion de référentiel est proche de celle de solide indéformable, il n'est pas étonnant de retrouver une relation « type Varginon » (ou *BABAR* pour les intimes!)

En prenant la dérivée dans  $\mathcal{R}$ , les vecteurs sont variables :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \underbrace{\frac{da'_x}{dt} \vec{u}'_x + \frac{da'_y}{dt} \vec{u}'_y + \frac{da'_z}{dt} \vec{u}'_z}_{(d\vec{A}/dt)_{\mathcal{R}'}} + a'_x \left( \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + a'_y \left( \frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + a'_z \left( \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (a'_x \vec{u}'_x + a'_y \vec{u}'_y + a'_z \vec{u}'_z) \\ &= \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

Cette formule permet de démontrer toutes les relations cinématiques données dans la suite.

### 8.1.3 Cinématique — Transformations des vecteurs vitesse et accélération

On donne ci-dessous les relations entre vitesse et accélération d'un point  $M$ , selon qu'elles soient calculées dans  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{R}'$ .

**Loi de composition des vitesses :**

$$\boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_e}, \quad (8.2)$$

où la VITESSE D'ENTRAÎNEMENT s'exprime dans le cas général

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}.$$

On retient ce résultat sous la forme « vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement ».

**Loi de composition des accélérations :**

$$\boxed{\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_c}, \quad (8.3)$$

où l'expression générale de l'ACCÉLÉRATION D'ENTRAÎNEMENT est (on note  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ) :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}),$$

et où l'ACCÉLÉRATION DE CORIOLIS s'exprime :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M).$$

#### Remarque

L'accélération d'entraînement n'est pas la dérivée temporelle dans  $\mathcal{R}$  de la vitesse d'entraînement dans le cas général. On peut d'ailleurs montrer que

$$\left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{a}_e + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M).$$

Dans l'expression de l'accélération de Coriolis, c'est bien la vitesse de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  qui intervient ce qui est logique puisqu'on cherche à exprimer les quantités cinématiques de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  en fonction de celles dans  $\mathcal{R}'$ .

**Remarque**

Dans l'accélération d'entraînement, on n'a pas précisé dans quel référentiel était prise la dérivée de  $\vec{\Omega}$ . En effet, cette dérivée ne dépend pas du référentiel, ce qui se voit en appliquant la formule de dérivation (8.1) :

$$\left( \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{=\vec{0}}.$$

**8.1.4 Deux cas particuliers incontournables**

Connaître les formules générales peut toujours s'avérer utile mais il n'est pas envisageable d'aborder un problème de changements de référentiel sans avoir en tête au moins les expressions précédentes dans les deux cas particuliers suivants : la translation et la rotation autour d'un axe fixe.

**Translation** Dans le cas d'une translation pure, on a logiquement  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$  et le mouvement de  $\mathcal{R}'$  est entièrement déterminé par celui d'un de ses points, par exemple  $O'$ . On a alors :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O'), \quad \vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \vec{0} \quad (8.4)$$

Lois de composition en translation : lorsque  $\mathcal{R}'$  est en translation dans  $\mathcal{R}$  on a :

**Rotation uniforme autour d'un axe fixe** On considère la situation décrite figure 8.1. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en rotation à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \omega \vec{u}'_z$ .

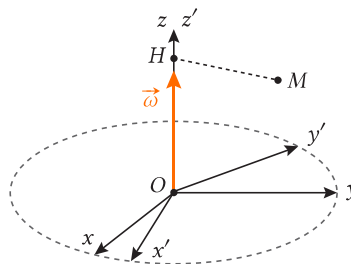


FIGURE 8.1 – Référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ .

La vitesse d'entraînement est alors

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}.$$

Le vecteur  $\vec{\omega}$  étant constant, l'accélération d'entraînement s'écrit :

$$\boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = -\omega^2 \vec{HM}},$$

où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation  $(Oz)$  (cf. figure 8.1). Enfin l'accélération de Coriolis s'écrit

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M).$$

Ainsi, lorsque  $\mathcal{R}'$  est en rotation autour d'un axe fixe dans  $\mathcal{R}$  on a :

## 8.2 Dynamique en référentiel non-galiléen

Les considérations cinématiques précédentes permettent de répondre à la question initiale : comment s'écrivent les lois de la mécanique dans un référentiel non-galiléen ? Plus précisément, comment écrire le PFD, TMC et le TEC dans  $\mathcal{R}'$

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = ? \quad , \quad \left( \frac{d\vec{L}_{O'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = ?$$

Il suffit d'écrire les théorèmes de la mécanique dans  $\mathcal{R}$ , puis d'appliquer les formules de changement de référentiel pour identifier les membres de droite « manquants » ci-dessus.

### 8.2.1 Principe fondamental de la dynamique, pseudo-forces

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, le PFD s'écrit  $m\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{F}$  où  $\vec{F}$  est la somme des forces « vraies », c'est-à-dire que des opérateurs exercent effectivement. En utilisant la loi de composition des accélérations (8.3), on fait apparaître le terme attendu  $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$  :

$$m(\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{F}.$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  non galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit ainsi :

$$\boxed{m\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}}, \quad (8.5)$$

où  $\vec{F}_{ie}$  est la FORCE D'INERTIE D'ENTRAÎNEMENT et  $\vec{F}_{ic}$  est la FORCE D'INERTIE DE CORIOLIS :

Ces forces d'inertie ne sont pas assimilables à des interactions, mais sont des « pseudo-forces » qui permettent de décrire la dynamique dans un référentiel non-galiléen avec le même langage que dans les référentiels galiléens.

Leurs expressions doivent être connues dans les cas particuliers de translation et rotation uniforme autour d'un axe fixe présentés plus haut.

**Exercice n°45 : Trajectoire d'une balle dans un train qui ralentit**

Quelle est la trajectoire d'une balle, lâchée de l'altitude  $h$  à l'instant  $t = 0$ , vue par le passager du train qui ralentit avec l'accélération  $\vec{a} = -a\vec{u}_x$  ( $a > 0$ ) ?

### 8.2.2 Théorème du moment cinétique

Le TMC en un point fixe<sup>3</sup>  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  s'écrit

$$\left( \frac{d\vec{L}_{O'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic}).$$

En effet, le TMC se déduit du PFD, donc l'ajout de nouvelles « forces » implique de les prendre en compte via leurs moments respectifs.

### 8.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Terminons avec un théorème énergétique. Comme le PFD s'écrit dans  $\mathcal{R}'$  avec des forces d'inertie, le TEC s'écrit simplement en prenant en compte les travaux de ces forces. On peut néanmoins faire deux remarques :

- la force de Coriolis ne travaille pas. En effet, sa puissance est nulle puisqu'elle est orthogonale à  $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$  :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic}) = (-2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)) \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{0}.$$

- la force d'inertie d'entraînement n'est en général pas conservative.

Le TEC s'écrit alors :

$$\Delta E'_c = W(\vec{F}) + W(\vec{F}_{ie}).$$

Dans le cas particulier de la rotation uniforme autour d'une axe fixe,  $\vec{F}_{ie}$  dérive d'une énergie potentielle. En effet, avec les notations de la figure 8.1 on a  $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} = mr\omega^2 \vec{u}'_r$ , où on adopte des coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ). Le travail de la force vaut alors :

$$\delta W(\vec{F}_{ie}) = mr\omega^2 \vec{u}'_r \cdot (dr \vec{u}'_r + r d\theta \vec{u}'_\theta + dz \vec{u}'_z) = mr\omega^2 dr = -d\left(-\frac{1}{2}mr^2\omega^2\right),$$

d'où l'expression de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \text{cste} = -\frac{1}{2}mHM^2\omega^2 + \text{cste},$$

qui est bien valable uniquement si la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}'_z$  est *constante*.

**Exercice n°46 : Pendule uniformément accéléré**

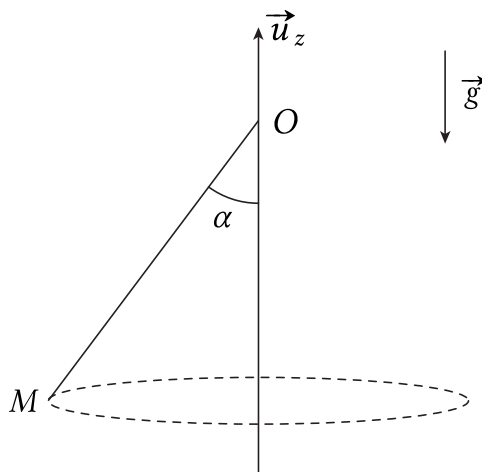
On considère un pendule simple accroché au plafond d'un train qui accélère à  $\vec{a} = a\vec{u}_x$ . Déterminer la position d'équilibre du pendule.

3. On pourrait prendre plus généralement n'importe quel point  $A'$  fixe dans  $\mathcal{R}'$ , pas nécessairement l'origine du repère lié.



**Exercice n°47 : Équilibre d'un pendule conique**

On lance un pendule conique avec un angle  $\alpha$  et une vitesse angulaire  $\omega$  constante. Que doit valoir au minimum  $\omega$  pour que ce mouvement soit stable et, dans ce cas, que vaut  $\alpha$  ?

**8.2.4 Transformation de Galilée**

Nous voyons donc comment passer d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen, et les changements qui doivent s'opérer pour écrire les lois de la dynamique. On peut aussi se poser la question dans l'autre sens : à quelle condition, étant donné un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement par rapport à lui est-il galiléen ? On veut pour cela que le passage se fasse sans ajout de pseudo-force. Cela impose :

- $\vec{a}_c = \vec{0}$ , donc  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ . Il ne doit pas y avoir de rotation relative entre les deux référentiel. Ils sont en translation l'un par rapport à l'autre ;
- $\vec{a}_e = \vec{0}$  donc, puisque  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{a}_{\mathcal{R}}(O') = \vec{0}$ .

Ainsi,  $\mathcal{R}'$  est galiléen si, et seulement si, il est en *translation rectiligne uniforme* par rapport à  $\mathcal{R}$ , ce qui se reformule en disant que tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est alors caractérisé par un unique vecteur constant  $\vec{V}$ , vitesse de  $O'$  dans  $\mathcal{R}$ . Prenons l'axe  $(Ox)$  aligné avec  $\vec{V} = V\vec{u}_x$ , les coordonnées dans  $\mathcal{R}'$  sont alors :

$$\boxed{x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \text{et} \quad t' = t.}$$

Ce changement porte le nom de TRANSFORMATION DE GALILÉE, qui est la transformation laissant invariantes les équations du mouvement en mécanique newtonienne. Elle n'implique aucun changement dynamique.

**Remarque**

En mécanique relativiste, où les lois de changement de référentiel sont différentes (notamment  $t' \neq t$ ), il faut introduire une nouvelle transformation et de nouvelles équations du mouvement.

**8.3 Quelques référentiels usuels**

Nous présentons dans cette partie les différents référentiels usuels à connaître

**Remarque**

On discutera dans la suite des critères permettant de déterminer si un référentiel est galiléen ou non, mais l'idée cardinale reste la même : on compare les prédictions de la mécanique newtonienne aux résultats expérimentaux, et une déviation peut ensuite être imputée à l'effet de forces d'inertie non prises en compte. Autrement dit, tout référentiel peut être considéré galiléen à une certaine précision près !

On représente figure 8.2 les différents référentiels étudiés dans la suite.

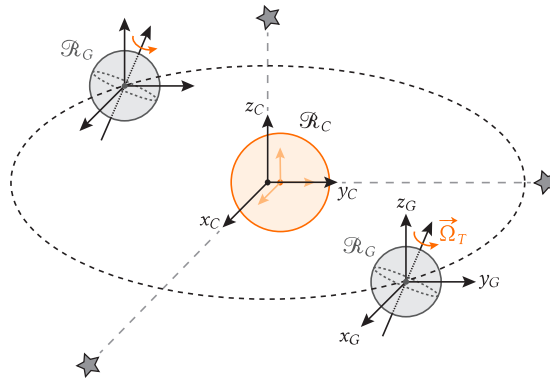


FIGURE 8.2 – Référentiels usuels en mécanique.  $\mathcal{R}_G$  est en translation quasi-circulaire par rapport à  $\mathcal{R}_C$ , et  $\mathcal{R}_T$  est en rotation par rapport à ces deux derniers. On a représenté les étoiles lointaines fixant les directions des repères liés à  $\mathcal{R}_C$  et  $\mathcal{R}_G$ .

**Référentiel de Copernic** Dans le RÉFÉRENTIEL DE COPERNIC  $\mathcal{R}_C$ , le centre de masse du système solaire est fixe et les axes du repère d'espace lié pointent vers trois étoiles lointaines.

En effet, en considérant des étoiles suffisamment éloignées, on pourra considérer que leurs positions varient de manière complètement négligeable si la durée de l'expérience est raisonnable. Ainsi, ces *étoiles fixes* fournissent expérimentalement les trois directions nécessaires pour définir proprement le référentiel  $\mathcal{R}_C$ .

**Remarque**

Le RÉFÉRENTIEL HÉLIOCENTRIQUE  $\mathcal{R}_H$  (ou référentiel de Kepler) est défini de manière semblable au référentiel de Copernic, à la différence près que c'est le centre de masse du Soleil (et non le barycentre du système solaire) qui est fixe dans  $\mathcal{R}_H$ , les axes des repères d'espace liés étant parallèles<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>. La différence entre  $\mathcal{R}_C$  et  $\mathcal{R}_H$  est principalement due à Jupiter qui, du fait de son attraction gravitationnelle, produit un mouvement du Soleil autour de leur barycentre.

Dans le référentiel de Copernic, la Terre est essentiellement soumise à un champ de force central et le mouvement de son centre d'inertie est en bonne approximation une translation quasi-circulaire dans le plan de l'écliptique. La période de ce mouvement (« année sidérale ») est de 365,25 jours. Dans la suite, sauf mention contraire, on considèrera systématiquement  $\mathcal{R}_C$  galiléen.

**Référentiel géocentrique** Le référentiel de Copernic n'est pas adéquat pour décrire par exemple le mouvement d'un corps en orbite autour de la Terre. On choisit plutôt dans ce cas le RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE  $\mathcal{R}_G$ , dans lequel le centre de masse de la Terre est fixe et dont les axes du repère d'espace lié sont parallèles à ceux du repère d'espace de  $\mathcal{R}_C$ . Ce référentiel est en *translation* quasi-circulaire par rapport à  $\mathcal{R}_C$ , d'où en particulier  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \vec{0}$ . La translation n'étant pas rectiligne uniforme,  $\mathcal{R}_G$  n'est pas galiléen.

Dans le référentiel géocentrique, la Terre est en rotation d'ouest en est autour de l'axe Nord-Sud, avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_T$ . Cet axe de rotation est incliné par rapport au plan de l'écliptique d'environ  $23^\circ$ . La période de rotation de la Terre dans ce référentiel est le JOUR SIDÉRAL  $T_{\text{sid}} \approx 86\,164$  s d'où

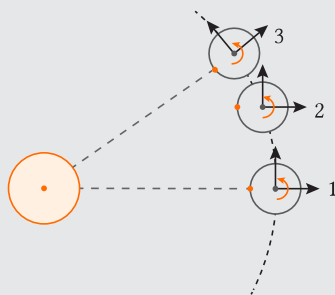
$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### Remarque

Quelle différence entre le jour sidéral et le jour solaire? Le JOUR SOLAIRE est le jour « vu sur Terre » : il s'agit de la durée qui s'écoule entre deux passages du Soleil au méridien local (points 1 et 3 sur la figure). Historiquement, cette valeur a été fixée à 24 heures ( $T_{\text{sol}} = 86\,400$  s).

Le JOUR SIDÉRAL, quant à lui, correspond à la période de rotation de la Terre dans  $\mathcal{R}_G$  (point 1 et 2 sur la figure).

La Terre tournant autour de son axe dans le même sens qu'autour du Soleil, elle doit effectuer un peu plus qu'une rotation sur elle-même pour que le Soleil ait la même position vu depuis la Terre. Ainsi, le jour solaire est *plus long* que le jour sidéral, de période  $T_{\text{sol}} \approx 86\,164$  s.



Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_T$  n'est pas rigoureusement constant. En effet, l'axe de rotation de la Terre possède un mouvement<sup>4</sup>

- de précession (la fameuse « précession des équinoxes »), de période 26 000 ans;
- de nutation de faible amplitude ( $9,2''$ ) et de période 18,6 ans, systématiquement négligée vu sa très faible amplitude.

Les mouvements étant étudiés sur des durées très faibles devant la période de précession, on négligera toute variation de  $\vec{\Omega}_T$  et considèrera systématiquement  $d\vec{\Omega}_T/dt = \vec{0}$ .

**Référentiel terrestre** Pour décrire un mouvement à la surface de la Terre, il reste à tenir compte de ce mouvement de rotation. Le RÉFÉRENTIEL TERRESTRE est le référentiel véritablement lié à la Terre : le centre de la Terre y est fixe et il est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}_C$  et  $\mathcal{R}_G$  de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = \vec{\Omega}_T$ . Ainsi,  $\mathcal{R}_T$  n'est pas galiléen.

### Remarque

Le RÉFÉRENTIEL DU LABORATOIRE (pour lequel la pièce d'étude est fixe) coïncide avec le référentiel terrestre tant que l'on néglige les mouvements locaux sur la Terre (tectonique des plaques par exemple). On fait rarement la distinction entre les deux.

Dans la suite on présente quelques manifestations du caractère non-galiléen du référentiel terrestre. Nous choisissons de mener cette discussion en séparant clairement les sources de « non-galiléanité » :

- dans un premier temps, le mouvement du centre d'inertie de la Terre dans  $\mathcal{R}_C$  conduit à des *effets de marée*,

4. Se référer au complément pour la description de ces types de mouvement dans le cadre général d'un solide en rotation.

- dans un second temps, la rotation propre de la Terre a des conséquences spécifiques, via les forces d'inertie associées.

Ces mouvements de la Terre, aujourd'hui considérés comme « évidents », ont mis des siècles avant d'être acceptés (longue domination de la théorie géocentrique, etc.). Le BUP *Les preuves expérimentales des mouvements de la Terre* passe en revue différentes preuves expérimentales de ces mouvements.

## 8.4 Conséquences du mouvement de la Terre autour du soleil

Dans un premier temps, nous ne tenons pas compte de la rotation propre de la Terre dans l'étude du mouvement et travaillons le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$ .

Ce référentiel est accéléré par rapport au référentiel de Copernic sous l'effet du champ gravitationnel des astres du système solaire (les contributions dominantes étant celles du Soleil et de la Lune), que l'on notera  $\vec{\mathcal{G}}_A = \vec{\mathcal{G}}_S + \vec{\mathcal{G}}_L + \dots$ . Si on considère que  $\mathcal{R}_C$  est galiléen, il faudra donc tenir compte d'une force d'inertie d'entraînement en écrivant la relation fondamentale de la dynamique dans  $\mathcal{R}_G$ . Rappelons que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \vec{0}$ , il n'y a donc pas de force d'inertie de Coriolis.

### 8.4.1 PFD dans le référentiel géocentrique

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  étudié dans le référentiel géocentrique. Le PFD s'écrit, en notant  $\vec{F}_{\text{autres}}$  l'ensemble des autres forces, non gravitationnelles, s'appliquant sur  $M$  (force électromagnétique, tension d'un fil, etc.) :

**Accélération d'entraînement** Le référentiel  $\mathcal{R}_G$  étant en translation par rapport à  $\mathcal{R}_C$ , l'accélération d'entraînement est uniforme et vaut  $\vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}_C}(T)$  avec  $T$  le centre d'inertie de la Terre fixe dans  $\mathcal{R}_G$ . On peut obtenir l'expression de cette accélération en appliquant le PFD au système {Terre} étudié dans  $\mathcal{R}_C$  (on note  $M_T$  la masse de la Terre) :

$$M_T \vec{a}_{\mathcal{R}_C}(T) = M_T \vec{\mathcal{G}}_A(T), \quad (8.6)$$

d'où l'expression de l'accélération d'entraînement

$$\boxed{\vec{a}_e = \vec{\mathcal{G}}_A(T)}.$$

**Terme différentiel des marées** On peut alors réinjecter dans le PFD l'expression de  $\vec{a}_e$  :

On voit ainsi apparaître le TERME DIFFÉRENTIEL DES MARÉES

$$m \vec{\gamma}_A(M) = m \left[ \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T) \right].$$

Dans le référentiel géocentrique, du fait qu'il ne soit pas galiléen, tout point ressent donc une action due à la différence de champ de gravité entre lui et le centre du référentiel.

#### 8.4.2 Forces de marée dues à un astre

Considérons l'interaction entre la Terre et la Lune. Celle-ci étant à symétrie sphérique son champ gravitationnel est équivalent à celui d'une masse ponctuelle de masse  $M_L$  située au centre de la lune  $L$ .

On représente figure 8.3 le terme de marées en différents points de la surface terrestre. L'effet de cette force différentielle est un « allongement » dans la direction  $TL$ , et un « rétrécissement » dans la direction orthogonale.

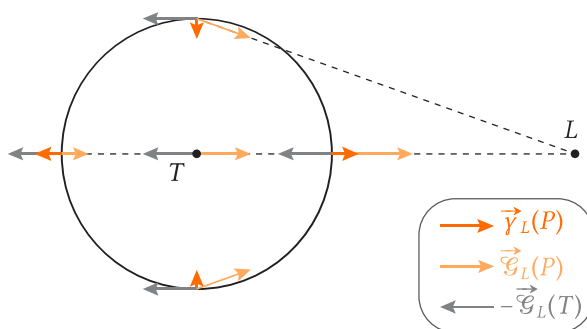


FIGURE 8.3 – Représentation du terme différentiel des marées dû à l'interaction Terre-Lune en quatre points de la surface terrestre.

Pour calculer plus précisément l'expression de  $\vec{\gamma}_L$ , on utilise les notations de la figure 8.4. Un point  $P$  de la surface de la Terre est repéré par les coordonnées  $(x, y) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$  (on se place dans un plan méridien contenant  $(TL)$  et le point  $P$  considéré). On notera la distance  $TL = D$ .

On supposera que  $R/D \ll 1$ , et on calculera ainsi toutes les quantités au premier ordre en  $R/D$ .

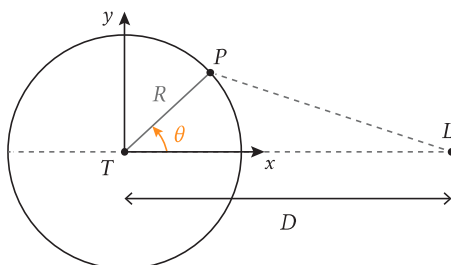


FIGURE 8.4 – Notations pour le calcul du terme différentiel des marées en un point  $P$  de la surface de la Terre.

On a :

$$\vec{\gamma}_L(P) = \mathcal{G}_{M_L} \left( \frac{\vec{PL}}{PL^3} - \frac{\vec{TL}}{TL^3} \right),$$

avec  $\vec{TL} = D\vec{u}_x$  et  $\vec{PL} = \vec{PT} + \vec{TL} = (D - R \cos \theta)\vec{u}_x - R \sin \theta \vec{u}_y$ . Ainsi

$$PL = \sqrt{(D - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta} \approx D \sqrt{1 - 2 \frac{R}{D} \cos \theta}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{PL^3} \approx \frac{1}{D^3} \left(1 - 2 \frac{R}{D} \cos \theta\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{D^3} \left(1 + 3 \frac{R}{D} \cos \theta\right).$$

Cela permet de réexprimer

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_L(P) &= \frac{\mathcal{G}M_L}{D^2} \left[ -\vec{u}_x + \left(1 - \frac{R}{D} \cos \theta\right) \vec{u}_x - \frac{R}{D} \sin \theta \vec{u}_y \right] \\ &\quad \times \left(1 + 3 \frac{R}{D} \cos \theta\right) \\ &\approx \frac{\mathcal{G}M_L}{D^2} \left[ 2 \frac{R}{D} \cos \theta \vec{u}_x - \frac{R}{D} \sin \theta \vec{u}_y \right] \\ &= \frac{\mathcal{G}M_L}{D^3} [2x \vec{u}_x - y \vec{u}_y] \end{aligned} \quad (8.7)$$

Cela justifie le tracé des  $\vec{\gamma}_L$  figure 8.3. Notamment, on retiendra l'ordre de grandeur du terme différentiel des marées dû à un astre de masse  $M$  :

$$\gamma \sim \frac{\mathcal{G}M}{D^2} \frac{2R}{D}.$$

On donne les ordres de grandeur du terme des marées sur Terre dans la table 8.1.

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
$M$ (kg)	$2.10^{30}$	$7.10^{22}$	$5.10^{24}$	$6.10^{23}$	$2.10^{27}$
$D$ (m)	$1,5.10^{11}$	$4.10^8$	$4.10^{10}$	$8.10^{10}$	$6.10^{11}$
$\frac{\mathcal{G}M}{D^2}$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$6.10^{-3}$	$3.10^{-5}$	$2.10^{-7}$	$6.10^{-9}$	$4.10^{-7}$
$\gamma$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$5.10^{-7}$	$1.10^{-6}$	$7.10^{-11}$	$1.10^{-12}$	$8.10^{-12}$

TABLE 8.1 – Ordres de grandeur des principales contributions au terme différentiel des marées à la surface de la Terre. La distance  $D$  indiquée est la distance minimale moyenne entre la Terre et l'astre considéré.

### Exercice n°48 : Limite de Roche

Si on reprend la figure 8.3 en remplaçant la Terre par un satellite et la Lune par n'importe quelle planète, on voit que le satellite a tendance à « s'écarteler ». Si la distance  $D$  diminue, il y aura dislocation du satellite lorsque les forces de marée dépasseront les forces de cohésion interne au satellite. Cette dislocation a lieu à une distance limite appelée LIMITE DE ROCHE, du nom de l'astronome français Édouard Roche (1820–1883). C'est cette limite que nous cherchons à déterminer dans cet exercice.

On fera les hypothèses suivantes :

- Le Soleil est sphérique de centre  $O$  et homogène, de rayon  $R_S = 7,0.10^5$  km et de masse  $M_S = 2,0.10^{30}$  kg (donc de masse volumique  $\rho_S = 1,4.10^3$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ ).
- Le référentiel héliocentrique est galiléen.
- Le satellite étudié est une planète tellurique, sphérique de centre  $P$ , homogène, de rayon  $r$  et de masse  $M_P$  telle que sa masse volumique est  $\rho_P = 5,5$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ .
- Le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil.

- Le satellite est en orbite circulaire de rayon  $R$  autour du soleil (avec  $R \gg r$ ).

1. Donner l'accélération  $\vec{a}(P/R_H)$  du centre  $P$  de la planète en fonction de  $R$  dans le référentiel héliocentrique.  
 2. Définir le référentiel « planéto-centrique » par analogie avec le référentiel géocentrique. Est-il galiléen ?  
 3. On étudie un point  $M$  de masse  $m$  posé sur la surface de la planète à l'équilibre dans le référentiel planéto-centrique. On suppose qu'à l'instant où on fait l'étude, le point  $M$  est aligné avec le centre du Soleil et de la planète (voir figure ci-dessous où les échelles ne sont pas respectées).  
 Faire le bilan des forces et des pseudo-forces appliquées à  $M$  dans le référentiel planéto-centrique. Montrer que la réaction du sol de la planète sur  $M$  vaut

$$\vec{R} = -\mathcal{G}m \left( \frac{M_P}{r^2} + \frac{M_S}{R^2} - \frac{M_S}{(R-r)^2} \right) \vec{u},$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire défini sur la figure précédente.

4. À quelle condition le système décolle-t-il ? Cette condition correspond à la dislocation de la planète.  
 5. Montrer que le rayon limite  $R_{\text{lim}}$  de l'orbite de la planète en deçà duquel la planète se disloque vaut

$$R_{\text{lim}} = \left( 2 \frac{M_S}{M_P} \right)^{1/3} r.$$

On rappelle pour cela que si  $\varepsilon \ll 1$ ,  $(1 + \varepsilon)^k \simeq 1 + k\varepsilon$ .

Donner l'expression de  $R_{\text{lim}}$  en fonction des masses volumiques  $\rho_S$  et  $\rho_P$  et du rayon solaire  $R_S$ . Faire l'application numérique. Commenter en ayant à l'esprit le rayon de l'orbite de Mercure :  $R_{\text{Mercure}} = 50.10^6$  km.

### 8.4.3 Théorie statique des marées océaniques

Notre expérience quotidienne des marées est celle des « marées hautes » et « marées basses » océaniques côtières qui se succèdent chaque jour, avec des amplitudes plus ou moins importantes. On peut comprendre les caractéristiques principales de ces marées océaniques avec un modèle quasi-statique originellement dû à Newton, qui repose sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la Terre, de symétrie sphérique, est entièrement couverte d'eau (supposée incompressible),
- cette eau est en équilibre hydrostatique dans le référentiel  $\mathcal{R}_G$ <sup>5</sup>,
- on ne considère que les contributions gravitationnelles de la Terre, de la Lune et du Soleil (et dans un premier temps on s'intéressera uniquement à la Lune). Ce point est justifié par les données de la table 8.1, qui montrent que les astres qui contribuent principalement aux marées sur Terre sont la Lune puis le Soleil avec une contribution environ deux fois moindre. Les autres astres ont une influence nettement plus faible.

5. En réalité, il faudrait étudier cet équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}_T$ , mais cela ne change rien pour cette discussion. Il s'agirait de remplacer le champ gravitationnel de la Terre par la pesanteur vulgaire introduite dans la section 8.5.2.

Dans le cadre de ce modèle, la surface libre des océans adopte la forme schématique suivante :

Dans la suite, nous discutons qualitativement l'effet de ces « bourrelets » océaniques sur différentes échelles de temps.

**Au cours d'une journée** Lors d'une rotation de la Terre, un point de la surface va successivement rencontrer, avec les notations de la figure ci-dessus, deux zones de pleine mer (abrégé PM, aux points  $P_1$  et  $P_2$ ) et deux zones de basse mer (abrégé BM, aux points  $B_1$  et  $B_2$ ). La périodicité de ce phénomène n'est cependant pas de 12 h exactement, car la Lune se déplace autour de la Terre, et revient dans la même position par rapport à la Terre<sup>6</sup> en 29,53 jours. En suivant le même raisonnement que pour la différence jour solaire/jour sidéral, on voit qu'une lunaison (donc  $29,53 T_{\text{sol}}$ ) correspond à  $29,53 - 1$  jours lunaires, d'où

$$T_{\text{lun}} = \frac{29,53}{29,53 - 1} T_{\text{sol}} \approx 24 \text{ h } 50 \text{ min}.$$

Deux marées hautes par jour lunaire correspondent ainsi à une période du phénomène de 12 h 25 min : on parle de **MARÉES SEMI-DIURNES**. C'est ce qu'on observe typiquement sur la côte française, cf. figure 8.5 où on a utilisé les données mesurées à Mimizan, dans le Sud-Ouest de la France.

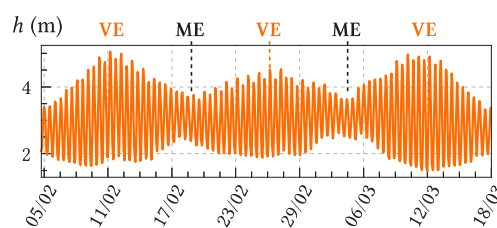
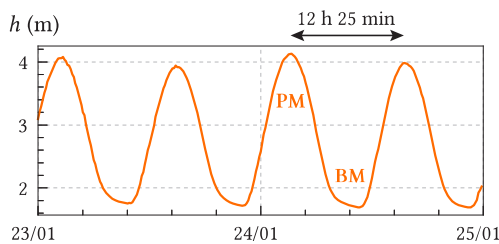


FIGURE 8.6 – Marées en février/mars 2020 à Mi-

FIGURE 8.5 – Relevé des hauteurs d'eau à Mimizan (Landes). On voit l'alternance de marées de vives-eaux (VE) et mortes-eaux (ME). Données issues de [Shom].

**Au cours d'un mois** Si l'alternance de marées hautes et marées basses à l'échelle d'une journée se comprend avec la description précédente, le relevé des hauteurs d'eau sur une plus grande durée montre que l'amplitude des marées varie dans le temps (cf. figure 8.6).

6. Il s'agit ainsi de la *période synodique* de la Lune, plus longue que la période de révolution sidérale (durée pour revenir dans la même position dans  $\mathcal{R}_C$ , aussi appelée mois lunaire sidéral) qui est de 27,32 jours – de même que le jour sidéral est plus court que le jour solaire.



Cette variation « bimensuelle » est due à la conjonction des effets du Soleil et de la Lune. En effet, comme représenté figure 8.7, l'effet de ces deux astres peut s'ajouter ou s'opposer, donnant lieu à des marées particulièrement importantes (VIVES-EAUX) ou particulièrement faibles (MORTES-EAUX). Plus précisément :

- les marées de vives-eaux ont lieu lorsque Soleil et Lune sont alignés, soit du même côté de la Terre (nouvelle lune, NL), soit de part et d'autre de la Terre (pleine lune, PL) ;
- les marées de mortes-eaux ont lieu lorsque Soleil et Lune sont en quadrature (premier et dernier quartiers).

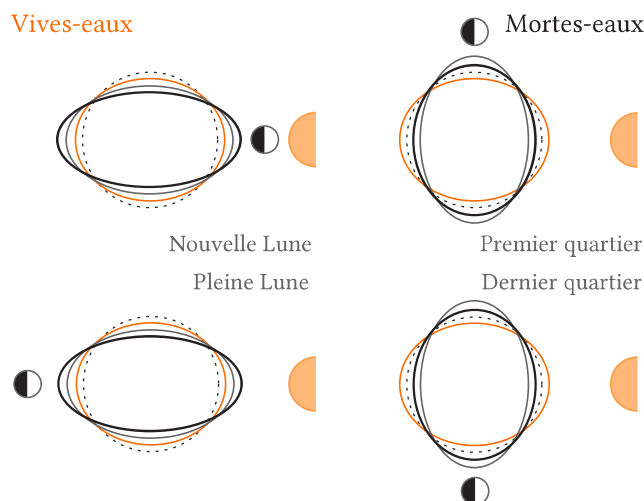


FIGURE 8.7 – Effet conjugué du Soleil et de la Lune expliquant le cycle de vives-eaux/mortes-eaux. Les « bourrelets océaniques » dus à chaque astre s'ajoutent ou se retranchent suivant la position relative du Soleil et de la Lune. Les échelles spatiales ne sont pas respectées.

En l'occurrence sur la figure 8.6, les premières et troisièmes marées de vives-eaux correspondent à la pleine lune, la seconde à la nouvelle lune.

**Au cours d'une année** On représente figure 8.8 le relevé des hauteurs d'eau sur une année complète. On constate comme attendu une succession de cycles de VE/ME, et une observation attentive montre que l'asymétrie d'amplitude entre les VE de la figure 8.6 s'inverse à un certain stade :

- pendant six mois consécutifs, les vives-eaux de PL sont plus fortes que les vives-eaux de NL ;
- pendant deux mois, les amplitudes sont comparables (sur la figure 8.8, en juillet-août) ;
- pendant les six mois suivants, les vives-eaux de NL sont plus fortes que les vives-eaux de PL.

Ces différences sont dues à l'ellipticité de la course de la Lune autour de la Terre. En effet, les marées étant d'autant plus importantes que la Lune est proche de la Terre, ces différentes phases correspondent aux moments où les PL coïncident plutôt avec le périgée (point où la distance Terre-Lune est minimale) ou avec l'apogée (point de distance Terre-Lune maximale).

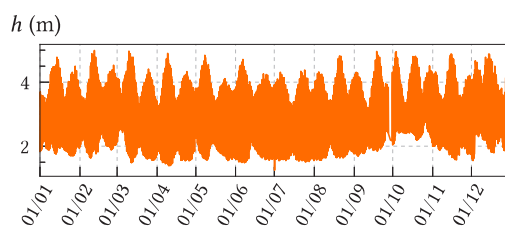


FIGURE 8.8 – Marées sur l'année 2020 à Mimizan (Landes). Données issues de [Shom].

#### 8.4.4 Galiléen ou non ?

Concluons en revenant sur la question plus générale du caractère galiléen ou non du référentiel géocentrique. En effet, on a montré précédemment toute l'importance du phénomène de marées, mais peut-on quantifier à quel point on pourrait ne pas en tenir compte et se ramener à un référentiel  $\mathcal{R}_G$  galiléen ?

En étudiant le mouvement d'un point dans  $\mathcal{R}_G$ , on aimerait écrire l'équation du mouvement suivante :

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}_G}(M) = \vec{F}_{\text{autres}} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M). \quad (8.8)$$

En effet, si le mouvement est étudié dans  $\mathcal{R}_G$ , on ne souhaite pas avoir à prendre en compte les champs gravitationnels extérieurs  $\vec{\mathcal{G}}_A$ . La question est donc la suivante : à quelle(s) condition(s) cette équation du mouvement est-elle adéquate ?

En comparant cette écriture au précédent énoncé du PFD dans le référentiel galiléen, on voit qu'il suffit de pouvoir négliger le terme de marées. Cela revient donc à négliger la non-uniformité du champ  $\vec{\mathcal{G}}_A$ , ce qui donne le critère d'utilisation du référentiel  $\mathcal{R}_G$  :

Le référentiel géocentrique peut être considéré galiléen pour une expérience de courte durée si l'on reste dans une zone d'espace dont l'extension est faible devant l'échelle typique de variation de  $\vec{\mathcal{G}}_A$ . Le seul champ gravitationnel à considérer est alors celui de la Terre. En notant  $\lambda_A$  l'échelle typique de variation de  $\vec{\mathcal{G}}_A$ , il faut donc avoir :

$$\boxed{TM \ll \lambda_A}.$$

#### Remarque

Le critère couramment présenté comme «  $\mathcal{R}_G$  peut être considéré galiléen sur une durée faible devant la période de révolution de la Terre » n'est donc pas adapté ! En effet, sur une telle durée, la trajectoire de  $T$  est environ rectiligne uniforme (on approxime la trajectoire circulaire par sa tangente), et on pourrait alors réécrire (??) sans force d'inertie :

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}_G}(M) = \vec{F}_{\text{autres}} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_A(M).$$

Il n'y a a priori aucune raison de ne pas considérer  $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ , ce qui est précisément ce que l'on souhaitait éviter.

À l'inverse, tant que  $TM \ll \lambda_A$ , on peut négliger le terme de marées et utiliser le PFD (8.8). Néanmoins, on voit que les corrections dues au terme de marées négligé vont s'accumuler au cours du temps (cf. le calcul réalisé plus bas pour le référentiel de Copernic), d'où le fait qu'on ne peut pas complètement occulter une condition, certes secondaire, sur la durée de l'expérience.

**Référentiel de Copernic** Cette discussion nous permet de préciser pourquoi on a considéré jusqu'à présent que le référentiel de Copernic était galiléen avec une bonne approximation.  $\mathcal{R}_C$  est en translation quasi-circulaire autour du centre de la Voie Lactée, donc on peut suivre le même raisonnement que précédemment en remplaçant  $\vec{\mathcal{G}}_A$  par le champ gravitationnel galactique  $\vec{\mathcal{G}}_{\text{gal}}$ , le nouveau référentiel galiléen de référence étant le référentiel « galactocentrique ».

La distance typique de variation de  $\vec{\mathcal{G}}_{\text{gal}}$  est de l'ordre de la taille de la galaxie, donc  $1.10^5$  A.L. On utilise le référentiel de Copernic sur des distances de l'ordre de la taille du système solaire, donc inférieures à  $1.10^{-2}$  A.L. Ainsi, le champ galactique peut être considéré comme uniforme à l'échelle du système solaire, et  $\mathcal{R}_C$  considéré comme galiléen (en ne considérant donc pas le champ  $\vec{\mathcal{G}}_{\text{gal}}$ ).

## 8.5 Conséquences de la rotation de la Terre sur elle-même

La partie précédente a montré les conséquences de la translation accélérée du centre de masse de la Terre dans le référentiel de Copernic. Désormais, on s'intéresse aux effets supplémentaires qui apparaissent lors d'une expérience réalisée sur Terre, à savoir les effets de la rotation de la Terre.

### 8.5.1 Principe fondamental dans $\mathcal{R}_G$

Nous adopterons les conventions présentées dans la figure 8.9 : l'axe  $(Oz)$  définit la verticale,  $(Ox)$  est dirigé vers le sud et  $(Oy)$  vers l'est. En particulier, les composantes du vecteur rotation  $\vec{\Omega}_T$ , constant, sont

$$\vec{\Omega}_T = \begin{pmatrix} -\Omega_T \cos \lambda \\ 0 \\ \Omega_T \sin \lambda \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

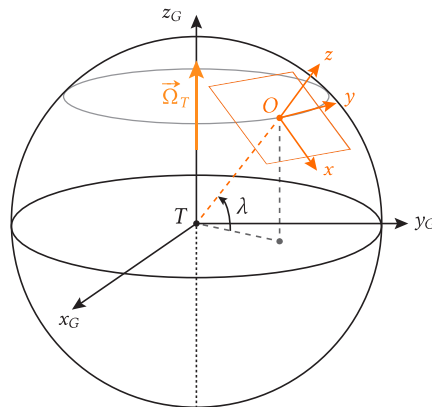


FIGURE 8.9 – Repère utilisé dans le référentiel terrestre. On rappelle la définition de la latitude  $\lambda$ . Note : par rapport à la figure 8.2, on a aligné l'axe  $(Tz_G)$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_T$ , ce qui ne change rien.

Si on suppose le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans  $\mathcal{R}_T$  (toujours avec  $\vec{F}_{\text{autres}}$  qui prend en compte les forces spécifiques au mouvement étudié) :

#### Remarque

Si on tenait compte du caractère non-galiléen de  $\mathcal{R}_G$ , il faudrait rajouter le terme de marées discuté dans la partie précédente.

Le référentiel terrestre étant en rotation autour de l'axe Nord-Sud fixe dans  $\mathcal{R}_G$ , l'accélération d'entraînement vaut

### 8.5.2 Terme inertiel, pesanteur

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  en équilibre dans  $\mathcal{R}_T$ , fixé à l'extrémité d'un fil exerçant sur lui une tension  $\vec{T}$ . L'équilibre s'écrit ( $M$  étant immobile dans  $\mathcal{R}_T$ ,  $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ ) dans  $\mathcal{R}_G$  :

On définit alors le POIDS  $m\vec{g}$  du corps  $M$  par :

$$\vec{0} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

Cela fournit donc l'expression :

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega_T^2 \overrightarrow{HM}.$$

$\vec{g}$  est appelée ACCÉLÉRATION DE LA PESANTEUR<sup>7</sup> somme du champ de gravité terrestre et de la force d'inertie d'entraînement axifuge

$$\vec{g} \approx \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega_T^2 \overrightarrow{HM}.$$

**Importance du terme axifuge** Le terme axifuge conduit à une variation de  $g$  avec la latitude (puisque  $\Omega_T^2 HM = \Omega_T^2 R \cos \lambda$ ) et à une différence entre la verticale « réelle » (qui est la direction radiale  $(TM)$ ) et la verticale « locale », alignée avec  $\vec{g}$  (direction  $(T'M)$ ).

7. En toute rigueur ce terme est la PESANTEUR VULGAIRE. La vraie accélération de pesanteur tient compte du caractère non galiléen de  $\mathcal{R}_G$ . S'ajoute donc le terme de marées. On ne fera pas cette distinction.

En pratique lorsqu'on mène une expérience à la surface de la Terre on définit la verticale ( $Oz$ ) comme étant alignée avec  $\vec{g}$ , ce qui est bien plus pratique.

#### Exercice n°49 : Ordre de grandeur des composantes du poids

Estimer, à la surface de la Terre ( $R_T = 6378$  km) l'ordre de grandeur des deux composantes du poids

$$\vec{g} \simeq \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega_T^2 \overline{HM}.$$

#### Remarque

D'autres corrections doivent être prises en compte pour avoir la « bonne » valeur de  $g$ . La non-sphéricité de la Terre est ainsi très importante, de même que l'altitude du point considéré, etc.

### 8.5.3 Quelques effets classiques du terme de Coriolis

L'introduction de l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  permet donc de tenir compte en pratique des forces d'inertie d'entraînement à la surface de la Terre. Néanmoins, *pour un système en mouvement*, une autre force d'inertie intervient puisque  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} \neq \vec{0}$  : celle de Coriolis. Comme

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v},$$

la force de Coriolis a pour effet notoire de *courber* la trajectoire du système étudié.

**Déviations vers l'est** Un effet célèbre attribué à la rotation terrestre est la *déviations vers l'Est* d'un corps lâché sans vitesse initiale.

#### Exercice n°50 : Expérience de Reich

On étudie ici l'expérience menée par Ferdinand Reich vers 1833 dans un puits de mine à Freiberg (latitude  $\lambda = 50^\circ 54'$ ). Des billes étaient lâchées sans vitesse initiale d'une hauteur  $h = 158,5$  m.

On travaille dans le référentiel terrestre. On prend comme repère ( $O, x, y, z$ ),  $O$  étant au fond du puits à la verticale du pont  $L$  de lâcher des billes, ( $Ox$ ) dirigé vers l'est, ( $Oy$ ) vers le nord et ( $Oz$ ) suivant la verticale ascendante. On note  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique considéré galiléen,  $g$  l'intensité du champ de pesanteur,  $m$  la masse d'une bille.

On rappelle que dans le référentiel terrestre le poids inclut la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre dans  $\mathcal{R}_G$ . On néglige les frottements dans tout l'étude.

1. Écrire les projections sur les trois axes du PFD appliqué à une bille dans  $\mathcal{R}_T$ .

2. On cherche à évaluer l'importance de la force de Coriolis. Quelle est la vitesse maximale d'une bille pour laquelle la force de Coriolis est égale au millième de son poids ? On prendra  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. Comme on constate expérimentalement que la vitesse précédente n'est pas atteinte, on va trouver une solution approchée du problème par une méthode dite *des perturbations*. Cela consiste à résoudre d'abord le problème en ignorant la force de Coriolis, afin de trouver l'équation horaire de la vitesse, puis à l'utiliser pour estimer la perturbation due à la force de Coriolis.

a. En utilisant cette idée, et en travaillant en ordre de grandeur, estimer l'écart entre le point de chute de la bille et  $O$ .

b. Quelles sont les équations horaires de la trajectoire  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  et  $z_0(t)$  lorsqu'on néglige l'effet de la force de Coriolis ? On dit qu'on travaille à l'ordre 0.

c. Quelle est l'expression de la force de Coriolis obtenue en la vitesse instantanée par son expression à l'ordre 0 ? Réécrire les équations du mouvement avec cette approximation et résoudre.

d. Déterminer les coordonnées du point d'impact au fond du puits. Comparer à la mesure expérimentale de Reich à savoir une déviation moyenne vers l'est de 28 mm.

4. On entend parfois dire que dans l'hémisphère sud la bille est déviée vers l'ouest. Qu'en pensez-vous ?

On peut regarder l'ordre encore supérieur : l'existence d'une vitesse non-nulle suivant  $\vec{u}_y$  conduit à une force de Coriolis suivant  $\vec{u}_x$ . Ainsi, la déviation vers l'Est doit s'accompagner d'une déviation vers le Sud. Néanmoins, cette dernière étant encore plus faible, elle sera quasi-impossible à mesurer. ça dépend de l'hémisphère non ?

#### Remarque

Une analyse alternative de ce problème peut être faite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La seule force à prendre en compte est alors le champ de gravitation terrestre. On pourrait croire naïvement que, le corps tombant à la verticale alors que la Terre tourne d'ouest en est, le point de chute devrait être à l'ouest du point de départ... mais c'est commettre l'erreur suivante : le corps étant initialement immobile dans  $\mathcal{R}_T$ , il a une vitesse initiale non-nulle dans  $\mathcal{R}_G$  !

En effet, cette vitesse initiale est simplement  $\Omega_T(R+h)\cos\lambda$  puisque, dans  $\mathcal{R}_G$ , le corps est entraîné par la rotation de la Terre. Cette vitesse est plus grande que la vitesse au sol  $\Omega_T R \cos\lambda$ , d'où la déviation vers l'Est. Ce calcul (plus subtile qu'il n'y paraît) est présenté dans le BUP *Vers l'est ou vers l'ouest ?*.

Terminons en soulignant que le fait que la déviation soit vers l'Est est due aux conditions initiales particulières choisies. Par exemple, si on tire un boulet de canon à la verticale avec une vitesse  $v_0$  depuis le sol (expérience de Mersenne), celui-ci retombe... à l'Ouest ! On peut calculer la déviation comme précédemment, et on obtient :

$$\Delta y = -\frac{4}{3}g\Omega_T \left(\frac{v_0}{g}\right)^3.$$

**Pendule de Foucault** La force de Coriolis est à l'origine d'une rotation du plan d'oscillation d'un pendule simple à la vitesse angulaire  $-\Omega_T \sin\lambda$ .

#### Exercice n°51 : Pendule de Foucault

Le dispositif de Foucault destiné à mettre en évidence la rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique est le suivant : on considère un pendule simple constitué d'une masse  $A$  de  $m = 30$  kg suspendue à l'extrémité inférieure d'un filin de longueur  $L = 67$  m. L'autre extrémité est fixée en un point  $O_1$ , placé à une hauteur égale à  $L$  sur la verticale du lieu de latitude  $\lambda$ .

On utilisera comme base du référentiel terrestre local  $(O, x, y, z)$ ,  $(Oz)$  étant la verticale ascendante,  $(Ox)$  orienté vers l'est et  $(Oy)$  vers le nord,  $O$  étant pris au niveau du sol.

On rappelle que par définition le poids inclut la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. La vitesse angulaire de ce mouvement est  $\omega_T = 2\pi/T_T$  où  $T_T = 86\,164$  s est la période du jour sidéral. On négligera toute forme de frottement dans cette étude.

1. À partir de l'équation vectorielle du mouvement, décrire sans calcul la nature de la trajectoire du pendule dans le référentiel terrestre local, pour un pendule placé à l'équateur. Le pendule est lâché sans vitesse initiale. On considèrera que l'amplitude du mouvement étant faible, le vecteur vitesse du pendule est toujours dans le plan horizontal.

2. On place maintenant le pendule au pôle nord. Quel serait, sans calcul, le mouvement du pendule pour un observateur lié au référentiel géocentrique ? En déduire la nature de ce même mouvement pour un observateur lié à la Terre.

3. Entre ces deux situations extrêmes, on va étudier l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule.

a. Montrer que la tension  $\vec{T}$  du fil peut s'écrire sous la forme  $\vec{T} = -T \frac{\overrightarrow{O_1A}}{L}$ .

b. Expliciter l'équation du mouvement dans la base du référentiel terrestre local en projetant la relation fondamentale de la dynamique sur les trois axes. On notera  $\vec{\omega}_T$  le vecteur rotation du référentiel terrestre par

rapport au référentiel géocentrique.

c. Réécrire ces équations en considérant que le mouvement a lieu dans le plan  $(xOy)$ , et que la composante de la force de Coriolis sur l'axe  $(Oz)$  est négligeable devant le poids. Montrer qu'alors sur les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega_T \sin(\lambda)\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_T \sin(\lambda)\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0,\end{aligned}$$

en posant  $\omega_0^2 = g/L$ .

4. Résoudre ces équations en introduisant la variable complexe  $u = x + iy$ , sachant qu'initialement  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ . On pourra ajouter les deux équations en multipliant une par  $i$  et simplifier le calcul en comparant  $\omega_T$  et  $\omega_0$ .

5. Quelle est la forme de la solution et la nature du mouvement dans un système d'axes tournant autour de  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\omega_T \sin \lambda$  dans le sens N – E – S – O ?

Vérifier la cohérence des résultats pour  $\lambda = 0^\circ$  et  $\lambda = 90^\circ$ .

Un tel pendule est accroché au panthéon, à Paris, latitude  $48^\circ 51'$ , effectue un tour complet en  $T = 31\text{h}47\text{min}$ . En déduire la période de la rotation de la Terre.

Historiquement, on peut retenir l'année 1851 comme celle de la première démonstration publique du dispositif de Léon Foucault : il suspendit une masse de 28 kg à la coupole du Panthéon à Paris, par un fil d'acier de 1,4 mm de diamètre et de 67 m de longueur. Le plan d'oscillation tourne alors avec une période de 31 h 47 min. Par exemple, le plan d'oscillation a tourné de  $11^\circ$  en une heure, ce qui est tout à fait observable.

**Galiléen ou non ?** Ces deux exemples permettent de conclure quant au caractère (non) galiléen du référentiel terrestre. On voit que les effets de la force de Coriolis augmentent avec le temps de l'expérience, la quantité d'intérêt étant  $\Omega_T t$ . Si  $\Omega_T t \ll 1$ , les corrections sont très faibles et on peut raisonnablement considérer le référentiel terrestre galiléen.

## 8.6 Ouverture n°1 : Quelques éléments de relativité restreinte

Un certain nombre de faits expérimentaux (vitesse de la lumière dans le vide indépendante du référentiel, valeur de la durée de vie de muons dont la vitesse est proche de celle de la lumière) sont incompatibles avec la mécanique newtonienne. Il a fallu abandonner un postulat fondamental de la mécanique classique : le caractère absolu du temps.

« Le temps ne s'écoule pas de la même façon dans tous les référentiels. »

Dès lors il faut attacher à chaque référentiel une variable temps particulière permettant de repérer la date des événements dans ce référentiel. Autrement dit le fait qu'un événement  $\mathcal{E}$  (par exemple l'émission d'un photon) ait lieu à un certain instant dans un référentiel  $\mathcal{R}$  doit être décrit par la donnée des 3 coordonnées d'espace mais également de l'instant correspondant :  $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ . Dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  ce même événement sera décrit par  $\mathcal{E}(x', y', z', t')$ .

Il existe bien sûr des relations entre ces deux descriptions qui dépendent du mouvement relatif des deux référentiels. On va donner une telle relation un peu plus loin. Quelle que soit la forme de cette relation il faut savoir qu'elle permet de lever les incompatibilités de la mécanique newtonienne avec la réalité expérimentale et quelques manipulations élémentaires permettent de retrouver les phénomènes de « dilatation des durées », de perte de la simultanéité de deux événements, etc. On se place dans une situation identique à celle de la transformation de Galilée, c'est-à-dire qu'on étudie le passage d'un référentiel galiléen à un autre :  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v} = V\vec{u}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On suppose qu'à  $t = t' = 0$  (ce qui suppose une synchronisation initiale des horloges des deux référentiels), les origines des deux référentiels sont confondues.

Dans le cadre de la relativité restreinte les coordonnées  $(x', y', z', t')$  et  $(x, y, z, t)$  d'un même événement  $\mathcal{E}$  sont alors liées par la transformation de Lorentz, où  $c$  est la vitesse de la lumière :

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Cette transformation est proche de celle de Galilée. Par exemple les équations  $y' = y$  et  $z' = z$  sont identiques. Même la relation  $x' = \gamma(x - Vt)$  ressemble, au facteur  $\gamma$  près, à  $x' = x - Vt$ . La différence majeure est dans la relation  $t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$ . Dans le cadre de la transformation de Galilée on aurait eu simplement  $t' = t$  (temps absolu). Ici  $t'$  est différent de  $t$ , et de plus, dépend de la position de l'événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour conclure, on peut remarquer que dans le cas où la vitesse  $V$  est non relativiste, c'est-à-dire  $V \ll c$ , on retrouve en première approximation la transformation de Galilée. Ainsi, la mécanique newtonienne n'est pas complètement remise en cause mais doit être vue comme l'approximation de la mécanique relativiste dans le cas des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière.



## 8.7 Ouverture n°2 : le référentiel barycentrique

Un référentiel particulier peut parfois s'avérer utile pour l'étude d'un système de points (et notamment le système à deux corps), le RÉFÉRENTIEL BARYCENTRIQUE

Soit un système de points  $\mathcal{S}$ . Le CENTRE D'INERTIE  $G$ , ou barycentre, est défini par

$$\sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \overrightarrow{GA} = \vec{0}.$$

Le mouvement de  $\mathcal{S}$  est initialement étudié dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

On appelle RÉFÉRENTIEL BARYCENTRIQUE  $\mathcal{R}_G^*$  le référentiel dans lequel  $G$  est fixe et dont les axes du repère d'espace lié sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ . En d'autres termes,  $\mathcal{R}_G^*$  est en *translation* par rapport à  $\mathcal{R}$ , comme représenté figure 8.10.

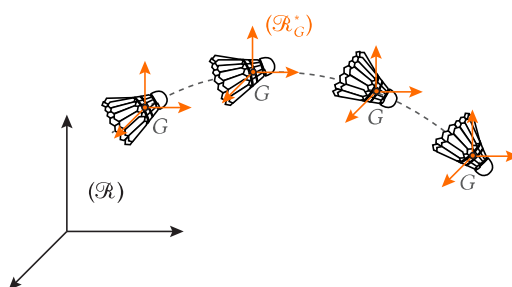


FIGURE 8.10 – Évolution du référentiel barycentrique d'un volant de badminton, d'après [BFRMeca1]. Bien que le volant tourne au cours du mouvement,  $\mathcal{R}_G^*$  est en *translation* par rapport à  $\mathcal{R}$ .

**Galiléen ou non ?** Par définition,  $\mathcal{R}_G^*$  est en translation à la vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(G)$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On a donc un critère très simple :  $\mathcal{R}_G^*$  est galiléen si, et seulement si,  $G$  est en mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}$ .

Dans le cas contraire, les relations cinématiques (8.4) s'appliquent, d'où (soulignons encore une fois que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$ )

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}}(G), \quad \vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}}(G), \quad \vec{a}_c = \vec{0}.$$

Le choix de ce référentiel permet, via la propriété fondamentale (??), d'obtenir des résultats très utiles sur les éléments cinétiques de  $\mathcal{S}$ , présentés ci-dessous.

Pour alléger les notations, on affectera une étoile aux quantités évaluées dans le référentiel barycentrique, de sorte que par exemple :

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}, \\ \vec{v}_M^* &= \vec{v}_{\mathcal{R}_G^*}(M) = \left( \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_G^*}. \end{aligned}$$

Notons que préciser dans quel référentiel est prise la dérivée est superflu en vertu de (8.1) puisque  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$ .

Avec ces notations, la relation de composition des vitesses s'écrit ici  $\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_G$ .

### 8.7.1 Théorèmes de König

L'idée derrière les théorèmes démontrés dans cette section est toujours la même : par construction, le référentiel barycentrique permet de séparer le « mouvement d'ensemble » du « mouvement interne » du système de points. Cette séparation se traduit dans les éléments cinétiques de  $\mathcal{S}$ , puisque moment cinétique et énergie cinétique se décomposent exactement en une contribution d'ensemble + une contribution barycentrique.

**Résultante cinétique** Commençons par un résultat préliminaire, assez intuitif. Si on calcule la quantité de mouvement totale dans le référentiel barycentrique (aussi appelée *résultante cinétique*, cf. ??), on a :

$$\vec{P}_S^* = \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \vec{v}_A^* = \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \frac{d\vec{GA}}{dt} = \vec{0},$$

puisque l'on doit prendre la dérivée de (??), qui est constante. La quantité de mouvement totale dans le référentiel barycentrique est donc nulle.

Cela permet de démontrer l'expression de la résultante cinétique dans  $\mathcal{R}$

$$\vec{P}_S = \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \vec{v}_A = \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A (\vec{v}_G + \vec{v}_A^*) = \left( \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \right) \vec{v}_G + \vec{P}_S^* = m \vec{v}_G.$$

**Moment cinétique** Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  on s'intéresse à  $\vec{L}_S(O)$ , moment cinétique calculé en  $O$ ; tandis que dans  $\mathcal{R}_G^*$  on s'intéresse à  $\vec{L}_S^*(G)$ . Relions ces deux quantités.

$$\begin{aligned} \vec{L}_S(O) &= \sum_{A \in \mathcal{S}} \vec{OA} \wedge m_A \vec{v}_A = \sum_{A \in \mathcal{S}} (\vec{OG} + \vec{GA}) \wedge m_A (\vec{v}_G + \vec{v}_A^*) \\ &= \vec{OG} \wedge m \vec{v}_G + \vec{OG} \wedge \underbrace{\sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \vec{v}_A^*}_{=\vec{0}} + \underbrace{\left( \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \vec{GA} \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{v}_G + \sum_{A \in \mathcal{S}} \vec{GA} \wedge m_A \vec{v}_A^* \\ \vec{L}_S(O) &= \vec{OG} \wedge (m \vec{v}_G) + \vec{L}_S^*(G) \end{aligned}$$

Ce résultat constitue le **PREMIER THÉORÈME DE KÖNIG**.

**Énergie cinétique** De même, exprimons l'énergie cinétique dans  $\mathcal{R}$  et relions la à l'énergie cinétique dans  $\mathcal{R}_G^*$ .

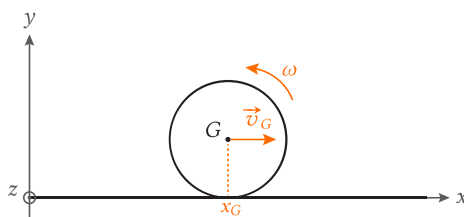
$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} m_A (\vec{v}_G + \vec{v}_A^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{A \in \mathcal{S}} m_A v_G^2 + \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} m_A (v_A^*)^2 + \vec{v}_G \cdot \underbrace{\sum_{A \in \mathcal{S}} m_A \vec{v}_A^*}_{=\vec{0}} \\ E_c &= \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} m_A (v_A^*)^2 \end{aligned}$$

Ce résultat constitue le **SECOND THÉORÈME DE KÖNIG**.

L'exercice ci-dessous illustre l'intérêt des théorèmes de König : les éléments cinétiques du solide sont calculés en séparant mouvement du centre d'inertie et mouvement propre, qui sont (souvent) individuellement simples.

### Exercice n°52 : Étude d'un roulement dans le référentiel barycentrique

**Disque roulant sur un plan fixe** On considère un disque  $\mathcal{S}$  de rayon  $R$  qui roule sur un sol plat. On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation. Pour un disque homogène de masse  $m$  et de rayon  $R$ , on peut calculer  $J = mR^2/2$ . Le référentiel  $\mathcal{R}$  sera celui lié au sol, et on le suppose galiléen.



Déterminer l'énergie cinétique du disque en utilisant le second théorème de König.

### 8.7.2 Lois de la dynamique dans le référentiel barycentrique

Terminons en mentionnant comment s'écrivent les lois de la dynamique dans le référentiel  $\mathcal{R}_G^*$ .

**Théorème de la résultante cinétique** La résultante cinétique étant nulle ( $\vec{P}_S^* = \vec{0}$ ), le théorème de la résultante cinétique n'apporte aucune information.

**Théorème du moment cinétique** A priori, le référentiel  $\mathcal{R}_G^*$  n'est pas galiléen, et le théorème du moment cinétique doit s'écrire en prenant en compte les forces d'inertie d'entraînement (il n'y a pas de force de Coriolis puisque  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$ ). Le résultat principal est qu'il n'y a pas lieu de tenir compte du caractère non-galiléen de  $\mathcal{R}_G^*$ , et le TMC peut s'écrire comme dans un référentiel galiléen.

Notons au préalable que le premier théorème de König permet d'identifier  $\vec{L}_S(G) = \vec{L}_S^*$  : le moment cinétique barycentrique est égal au moment cinétique dans  $\mathcal{R}$  calculé en  $G$  (point a priori mobile). Les dérivées temporelles étant les mêmes dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_G^*$  (pas de rotation relative des référentiels), on a :

$$\left( \frac{d\vec{L}_S^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}_G^*} = \left( \frac{d\vec{L}_S(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad \text{puis} \quad \left( \frac{d\vec{L}_S(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) - \vec{v}_G \wedge \vec{P}_S,$$

or  $\vec{P}_S = m\vec{v}_G$ , donc le produit vectoriel s'annule. Le TMC s'écrit donc *comme en un point fixe* :

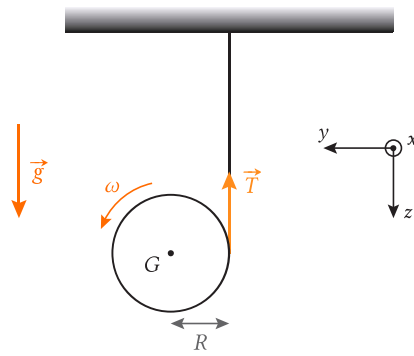
$$\boxed{\left( \frac{d\vec{L}_S(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})}.$$

Grâce à l'égalité  $\vec{L}_S(G) = \vec{L}_S^*$ , on peut interpréter ce résultat en disant que le TMC est applicable dans  $\mathcal{R}_G^*$  bien que ce référentiel ne soit pas a priori galiléen (mais les moments des forces doivent être calculés en  $G$ ).

Le théorème du moment cinétique barycentrique est extrêmement utile pour étudier le mouvement d'un solide. L'exercice ci-dessous fournit une illustration élémentaire.

#### Exercice n°53 : Dynamique d'un yo-yo

On considère un yo-yo, assimilé à un disque de rayon  $R$  et de moment d'inertie  $J$  autour de son axe ( $Gx$ ), autour duquel est enroulé un fil sans masse.



Déterminer, en travaillant dans le référentiel barycentrique, l'expression de l'accélération du centre de masse.

## 8.8 Exercices complémentaires

### Exercice n°54 : Point sur un plateau oscillant

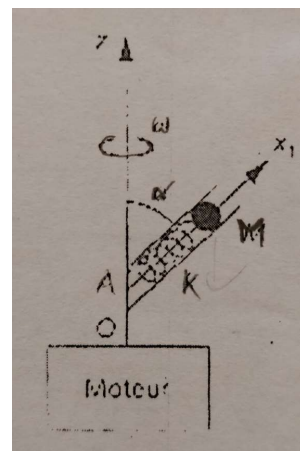
Un point matériel de masse  $m$  est posé sur un plateau horizontal. Ce plateau est animé par rapport au sol d'un mouvement d'oscillation verticale d'équation  $z = a \cos \omega t$ .  
Quelle condition doit satisfaire  $\omega$  pour que le point ne quitte pas le plateau ?

### Exercice n°55 : Bille dans un tube en rotation, version RNG

On reprend la situation de l'exercice 16. Présenter une résolution en se plaçant dans le référentiel du tube et démontrer l'utilité des référentiels non-galiléens.

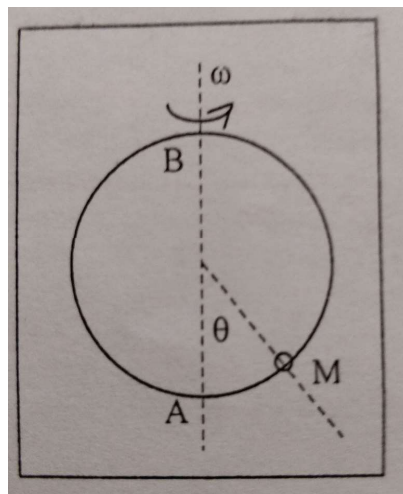
### Exercice n°56 : Mouvement oscillant dans un tube en rotation

Un tube est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, et tourne autour de cet axe à une vitesse  $\omega$ . Une bille de masse  $m$  coulisse sans frottements dans ce tube, et est reliée à l'origine par un ressort de raideur  $k$ .  
Quelle relation doivent satisfaire  $k$ ,  $\alpha$ ,  $m$  et  $\omega$  pour observer un mouvement oscillant ? Quelle est alors la période du mouvement ?



### Exercice n°57 : Énergie d'une perle en rotation sur un anneau

Un anneau de rayon  $R$  de centre  $O$  tourne autour d'un de ses diamètres  $AB$  vertical à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. Une perle  $M$  de masse  $m$  peut glisser sans frottements sur l'anneau. On repère sa position par l'angle  $\theta$  que fait la verticale avec la droite  $OM$ .



On étudie le mouvement dans le référentiel tournant lié au cerceau.

1. Faire le bilan des forces auxquelles est soumis  $M$ .
2. Montrer qu'on peut associer une énergie potentielle à ce système.
3. Dédire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .
4. Déterminer les positions d'équilibre  $\theta_{eq}$ .
5. Étudier la stabilité de ces positions.