TD n°V : Les phénomènes de transport

Exercice 21 : Quelques questions sur les phénomènes de transport

1. Qu'est-ce que l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local ? Dans quel cadre sert-elle ?

2. Sur la diffusion...

a. Rappeler la loi de Fourier pour la conduction thermique. D'où vient-elle ? Quels sont les équivalents pour les autres phénomènes de diffusion ?

b. Rappeler l'équation de la chaleur. Comment la démontrer ?

c. Pourquoi la diffusion est-elle un phénomène irréversible ?

3. Sur la convection...

a. Quelle est l'origine physique de la convection ?

b. Rappeler la loi de Newton. Donner des ordres de grandeur du coefficient de conducto-convection. De quoi dépend-t-il ?

4. Sur le rayonnement...

a. Qu'est-ce qu'un corps noir ? Comment le modéliser ?

b. Rappeler les lois de Wien et de Stefan pour le rayonnement du corps noir.

c. On suppose la Terre sphérique de rayon R_T en orbite circulaire de rayon D autour du soleil de rayon $R_S = 6{,}957.10^8\,\mathrm{m}$. Le flux surfacique du rayonnement solaire au niveau de l'orbite terrestre est $\Phi_{ST} = 1368\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Ce rayonnement est émis par la surface du Soleil qui rayonne comme un corps noir de température T_S.

Évaluer T_S. Quelle est la longueur d'onde d'émission maximale pour le Soleil ?

d. On considère que ce rayonnement est constitué de rayons tous parallèles, et que la Terre en réfléchit une fraction $\alpha = 0{,}30$. On considère que l'atmosphère est complètement transparente au rayonnement solaire. On suppose que la Terre est en équilibre radiatif et que le sol terrestre rayonne comme un corps noir, uniformément à la température T_T, température moyenne de la Terre (on néglige toutes les variations).

Évaluer T_T dans ce modèle et commenter.

5. En faisant l'analogie avec la résistance électrique, introduire la résistance thermique dans le cas du transfert thermique par conduction. À quoi sert-elle ? Peut-on aussi introduire une résistance thermique pour les transferts par convection et rayonnement ?

Exercice 22 : Isolation d'une canalisation d'eau

On considère une canalisation cylindrique de rayons intérieur et extérieur R_1 et R_2, contenant de l'eau chaude à la température T_c uniforme. Cette canalisation métallique, de conductivité λ, est entourée d'une gaine isolante de conductivité thermique λ' et de rayon extérieur R_3. La gaine est en contact avec de l'air à la température uniforme T_0.

On étudie les transferts thermiques en régime permanent. On constate alors qu'il existe une discontinuité de température aux interfaces eau-métal ($R = R_1$) et gaine-air ($R = R_3$) décrites par un même coefficient de conducto-convection h.

1. Expliquer l'origine des discontinuités et donner la relation physique permettant de les décrire. Déterminer l'unité de h. La température est-elle également discontinue en $R = R_2$?

2. Lors de l'isolation d'un mur, on aurait tendance à penser que plus on met d'isolant, meilleure est l'isolation. L'énoncé semble ici supposer que, dans la géométrie concernée, il y a un optimum d'épaisseur. Pourquoi cet optimum est-il susceptible d'exister ? Quelles sont les grandeurs caractéristiques en jeu ? Pouvez-vous intuiter le résultat par analyse dimensionnelle ?

3. Discuter quantitativement de l'efficacité du système d'isolation. Quelle valeur de R_3 minimise les pertes thermiques ? Faire l'application numérique pour $h = 100$ USI, $R_1 = 8\,\mathrm{cm}$ et $R_2 = 10\,\mathrm{cm}$. On prendra des valeurs de conductivité thermique typiques.

Indication : Il peut-être efficace de raisonner en terme de résistance thermique. Rappeler sa définition, son expression en géométrie cartésienne, et démontrer qu'en géométrie cylindrique on trouve $R_{th} = \dfrac{\ln\left(R_2/R_1\right)}{2\pi\lambda h}$

Exercice 23 : Ondes thermiques (Effet de cave)

On cherche à déterminer la distribution de température dans le sol ($z \geqslant 0$) en fonction de la température de surface ($z = 0$). On suppose que cette dernière oscille de façon sinusoïdale autour d'une valeur moyenne T_0, avec une pulsation ω.

1. Donner l'équation de la chaleur dans le sol supposé indéformable. Par un raisonnement dimensionnel, donner l'échelle caractéristique du problème.

2. Résoudre cette équation en utilisant une représentation complexe.

3. Interpréter le résultat obtenu en termes d'atténuation, de longueur d'onde et de

BY-NC-SA
jules.fillette@phys.ens.fr

vitesse de phase. Ce phénomène vous évoque-t-il d'autres situations physiques ?

4. Calculer la profondeur de pénétration de l'onde de chaleur dans le cas des fluctuations journalières et dans celui des fluctuations annuelles. On utilisera les valeurs suivantes :

$$\lambda = 0{,}4\,\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}, \qquad C = 800\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}, \quad \text{et} \quad \rho = 3.10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

Exercice 24 : Température de contact (cf compo 2002)

1. On considère un barreau semi-infini occupant le demi-espace $x \geq 0$, à la température initiale T_i. Il est calorifugé sur sa surface latérale. À l'instant $t = 0$, on place son extrémité $x = 0$ en contact avec un thermostat à température constante T_0, et on l'y laisse pour tout $t \geq 0$. Le barreau a une conductivité thermique λ, une chaleur spécifique massique C et une masse volumique ρ. On note D le rapport $\lambda/\rho C$.

a. Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température dans le barreau.

b. En utilisant un argument dimensionnel, montrer que la solution est fonction d'une variable réduite que l'on exprimera. Calculer alors la distribution de température dans le barreau.

c. En déduire la densité de courant de chaleur. De quelle équation aux dérivées partielles est-elle solution ?

2. On considère maintenant deux barreaux semi-infinis caractérisés par les coefficients λ_i, C_i, ρ_i et D_i et les températures initiales T_i, avec $i \in \{1,2\}$. A l'instant $t = 0$, on met les deux barreaux en contact par leur extrémité située en $x = 0$.

a. En supposant qu'à tout instant le courant de chaleur est maximal à l'interface, comment évolue la température de contact ? Tracer l'allure des distributions de température et de densité de courant de chaleur à différents instants.

b. En utilisant les résultats du §1, déterminer la distribution de température dans les deux barreaux.

c. Calculer la densité de courant de chaleur en $x = 0$ dans les deux matériaux et en déduire $T(x=0)$.

d. **Application numérique** : calculer la température de contact entre la main et un matériau à 20 °C, dans le cas de l'eau, du bois et de l'aluminium. On assimilera le corps humain à de l'eau à 37 °C. On donne :

eau	$D = 1{,}5.10^{-7}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$	$\lambda = 0{,}63\,\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$
bois	$D = 3.10^{-7}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$	$\lambda = 0{,}13\,\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$
aluminium	$D = 8.10^{-5}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$	$\lambda = 236\,\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$

Exercice 25 : Marche aléatoire à une dimension (cf compos 2002)

On considère le mouvement à une diffusion d'une particule initialement située à l'origine et se déplaçant par pas d'égales longueurs a sur un axe (Ox) orienté de la gauche vers la droite. Ces pas sont indépendants, ils ont tous la même durée T et la particule a la même probabilité d'effectuer un pas vers la gauche ou vers la droite

1. Diffusion de la particule

a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(n_d, N)$ que la particule ait fait n_d pas vers la droite en N pas.

b. Exprimer la distance parcourue x en fonction de n_d et N. Calculer $\langle x\rangle$ et $\langle x^2\rangle$ en fonction de N et a. En tirer un coefficient de diffusion D que l'on exprimera en fonction de a et T.

2. Limite Gaussienne

a. Écrire la probabilité $\mathbb{P}'(n,N)$ que la particule soit en $x = na$ après N pas.

b. En utilisant la formule de Stirling, dans la bonne limite, montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}'(n,N) \simeq \frac{A}{\sqrt{N}}\exp\left(\frac{-n^2}{2N}\right),$$

avec A une constante à déterminer.

Rappel sur la formule de Stirling : $N! \sim (N/\mathrm{e})^N\sqrt{2\pi N}$ quand $N \to \infty$.

c. Exprimer ce résultat en variables x et t en introduisant la fonction $\mathbb{P}(x,t)$ probabilité d'être en x à l'instant t.

3. Du discret au continu

a. Exprimer la probabilité $\mathbb{P}'(n,N)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}'(k,N-1)$, avec les valeurs de k appropriées.

b. En se plaçant dans la limite $N \to \infty$, faire un développement limité de l'équation précédente pour obtenir une équation différentielle sur $\mathbb{P}(x,t)$. On pourra vérifier aisément que l'expression trouvée en 2.3 est solution de cette équation.

4. Lien avec la diffusion : on va faire une modélisation microscopique simplifiée. Chaque pas correspond au libre parcours de la particule jusqu'à une collision avec une autre particule du gaz. On suppose alors qu'entre chaque collision, les particules se déplacent à la vitesse quadratique moyenne $u^\star$ sur $l^\star$, le libre parcours moyen.

a. Exprimer le libre parcours moyen l en fonction de la densité de particules n et de la section efficace de collision σ_0. Donner un ordre de grandeur de l pour un gaz parfait dans les conditions usuelles de pression et de température.

b. Réécrire le coefficient d'autodiffusion trouvé précédemment en fonction de $u^\star$ et $l^\star$. En évaluer un ordre de grandeur. Sachant que le coefficient de diffusion dans un liquide est environ 10^4 fois plus faible que dans un gaz, expliquer pourquoi il est conseillé d'agiter son café quand on y verse du sucre.

c. En déduire la dépendance du coefficient d'autodiffusion avec la température T et la pression P.

d. Expérimentalement, pour l'autodiffusion, on obtient $D \propto p^{-1} T^b$ avec $1{,}6 \leq b \leq 2$. Commenter et interpréter les différences.

e. Dans le cas de la diffusion d'un gaz à travers un milieu poreux, ce résultat reste-t-il valable ? Pourquoi ?

(cc) BY-NC-SA
jules.fillette@phys.ens.fr