

## Chapitre 3

# Dynamique des fluides

Le but de ce nouveau chapitre est d'obtenir les équations de la dynamique des fluides, en utilisant la description cinématique développée au chapitre précédent et les lois de la mécanique classique.

### 3.1 Contraintes tangentielles et viscosité(s)

Dans le chapitre précédent on a étudié la partie *normale* de l'action exercée sur une particule fluide, à savoir la pression. Dans un fluide au repos c'est bien la seule contribution aux efforts exercés, mais elle est complétée, dans un fluide en mouvement, par une contrainte tangentielle appelée FORCE DE CONTRAINTES VISQUEUSES OU CISAILLEMENT.

#### 3.1.1 Contraintes tangentielles dans un écoulement de cisaillement simple

**Situation géométrique** Dans un premier temps nous considérons un écoulement de la forme  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$  appelé « écoulement de cisaillement simple ». Une plaque solide sur laquelle le fluide est initialement au repos est mise en mouvement horizontal. Le fluide est progressivement entraîné avec elle. *Quelle force le met en mouvement ?*

**Définition** L'expérience montre que pour toute une classe de fluides, les FLUIDES NEWTONIENS, la force exercée par le fluide sur la paroi immobile de surface  $S$  vaut :

$$\boxed{d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{e}_x}. \quad (3.1)$$

On voit qu'elle dépend du terme  $\partial v_x / \partial y$  appelé TAUX DE CISAILLEMENT. En l'absence de mouvement relatif entre les particules fluides, c'est-à-dire si le fluide se meut d'un bloc, cette force est nulle. Le scalaire  $\eta$  est la VISCOSITÉ DYNAMIQUE du fluide. Son unité<sup>1</sup> est le Pa · s. En effet :

**Contrainte tangentielle** La force par unité de surface appliquée par le fluide sur la paroi est appelée CONTRAINTE TANGENTIELLE (en physique, le terme « contrainte » désigne systématiquement une force par unité de surface) :

$$\boxed{\sigma = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}}.$$

### 3.1.2 Équivalent volumique des forces de viscosité

Comme pour les forces de pression il est utile, pour décrire le mouvement des particules fluides, de trouver un équivalent volumique des forces de viscosité.

---

1. Une ancienne unité est la poise : 1 Po = 0,1 Pa · s.

### Cas d'un cisaillement simple

Dans ce cas simple,  $\eta \partial^2 v_x / \partial y^2$  apparaît comme l'équivalent volumique des contraintes tangentielles (ou forces de viscosité).

### Cas général

On admet que ce résultat se généralise à tout fluide *newtonien* et *incompressible* et en trois dimensions : l'équivalent volumique des forces de viscosité  $\vec{f}_{\text{visc}}$  s'écrit

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{visc}} = \vec{f}_{\text{visc}} d\tau = \eta \Delta \vec{v}(M, t) d\tau}, \quad (3.2)$$

où  $d\tau$  est le volume élémentaire et  $\Delta$  est l'opérateur laplacien vectoriel.

#### Remarque

Pour un scalaire on a

$$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

tandis que pour un vecteur,

$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases} .$$

On note parfois  $\vec{\Delta}$  l'opérateur laplacien vectoriel pour le différentiel du laplacien scalaire  $\Delta$  mais il n'y a a priori pas d'ambiguïté sur celui à utiliser étant donné l'objet auquel il s'applique.

### 3.1.3 Diffusion de quantité de mouvement et viscosité cinématique

Considérons alors une particule fluide uniquement soumise aux efforts du courant environnant : force de pression et force de viscosité.

Finalement :

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \quad (3.3)$$

Cette équation est une équation de diffusion dont le coefficient de diffusion s'identifie à  $\eta/\rho$ . Il est noté  $\nu$  et appelé VISCOSITÉ CINÉMATIQUE. Comme tout coefficient de diffusion il s'exprime en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 3.1.4 Quelques ordres de grandeur

Fluide	Température (°C)	Viscosité dynamique (Pa · s)	Viscosité cinématique ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
Eau	20	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$
Air	25	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-6}$
Sang	37	$\sim 4 - 15 \cdot 10^{-3}$	$\sim 4 - 15 \cdot 10^{-6}$
Éthanol	20	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
Mercure	25	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
Huile d'olive	20	$\sim 80 \cdot 10^{-3}$	$\sim 1 \cdot 10^{-4}$
Glycérol	20	1,4	$1,3 \cdot 10^{-3}$
Miel	20	2 à 10	1,4 à $7 \cdot 10^{-3}$
Verre fondu	500	$\sim 10$	$\sim 1 \cdot 10^{-2}$

TABLE 3.1 – Valeurs des viscosités dynamique et cinématique de quelques fluides communs à la pression atmosphérique. L'ordre de grandeur des valeurs pour l'eau et l'air sont à retenir.

### 3.1.5 Généralisation aux fluides complexes

**Tenseur des contraintes** Dans le cas général, les efforts exercés sur une particule de fluide (approximons-la par un cube) se répartissent sur les trois faces et, sur chaque face, dans les trois directions. Notons  $[\sigma]$  le tenseur des contraintes,  $[\sigma](\vec{n})$  est la contrainte qui s'exerce sur une surface de normale  $\vec{n}$ . Les efforts sont donc complètement décrits dès qu'on a l'expression de  $[\sigma]$  appliqué aux trois vecteurs de la base.

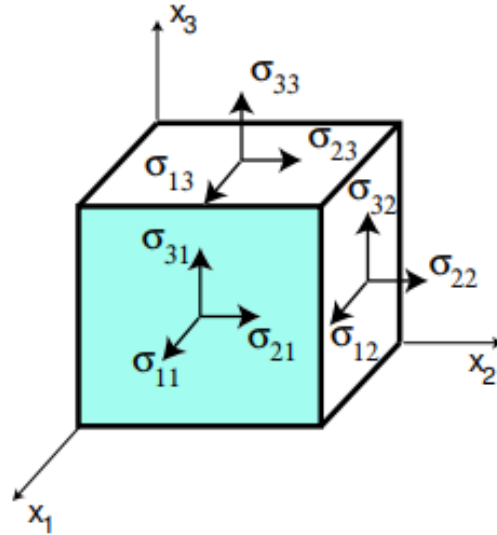
On note donc  $[\sigma] = (\sigma_{ij})$  avec :

$$[\sigma](\vec{e}_x) = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{yx} \vec{e}_y + \sigma_{zx} \vec{e}_z$$

$$[\sigma](\vec{e}_y) = \sigma_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \sigma_{zy} \vec{e}_z$$

$$[\sigma](\vec{e}_z) = \sigma_{xz} \vec{e}_x + \sigma_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z$$

Ces 9 composantes ont chacune une signification géométrique différente représentées sur la figure ci-contre.



Tous les termes diagonaux de ce tenseur représentent les efforts normaux, c'est à dire la pression. Par hypothèse d'isotropie ils sont tous égaux à  $-p$ . Dans un fluide isotrope au repos on a donc  $[\sigma] = -p[I]$  ( $[I]$  est le tenseur identité). Le tenseur  $[\sigma']$  qui fait la différence entre  $[\sigma]$  et  $-p[I]$  est le TENSEUR DES CONTRAINTES VISQUEUSES. L'équivalent volumique des forces de viscosité est en toute rigueur  $\text{div}[\sigma]$  qui se ramène (on ne le démontre pas ici et ça n'a que peu d'intérêt pour vous), dans le cas d'un fluide *newtonien* et *incompressible* à

$$\text{div}[\sigma] = \eta \Delta \vec{v}.$$

**Cas des fluides non newtoniens** Si le fluide étudié n'est pas newtonien, l'expression de la contrainte qu'il subit lorsqu'il est soumis à un effort est nettement plus compliquée. Dans ce cas, le tenseur des contraintes ne peut plus être ramené à « une constante fois le laplacien de la vitesse ». On doit non seulement garder le caractère tensoriel donc chaque élément dépend du gradient de vitesse local. Le fluide ne réagit pas de la même manière selon qu'on le soumet à un gradient de vitesse important ou qu'on le manipule délicatement.

En pratique, sous des contraintes usuelles, tous les fluides *composés de petites molécules* sont newtoniens : les gaz, les liquides comme l'eau, l'éthanol, l'acétone, le glycérol, l'hexadécane, l'huile d'olive, le mercure, etc. sont des fluides newtoniens. Leur viscosité dynamique  $\eta$  est une constante qui ne dépend pas de l'écoulement subit par le fluide. Par contre elle dépend de la température<sup>2</sup> et éventuellement de la pression même si cette dépendance en pression est faible et systématiquement négligée.

Des problèmes peuvent survenir lorsque les particules constitutives grossissent ou plus précisément *s'allongent* ou que les interactions entre elles deviennent plus importantes. On distingue généralement deux grandes catégories de fluides non newtoniens :

**Les fluides RHÉOFLUIDIFIANTS** Sous une faible contrainte l'enchevêtrement des particules longues empêche le fluide de se mouvoir et la viscosité est très grande. À l'inverse lorsque la contrainte dépasse un certain seuil elle engendre l'alignement des particules et le fluide coule plus facilement. La viscosité diminue lorsque le gradient de vitesse augmente. Cela donne un système de plus en plus fluide, ce qui justifie le nom de *rhéofluidifiant*. C'est le cas notamment des polymères en solution ou à l'état fondu, des émulsions peu chargées, des suspensions et des dispersions (ex. : purée, moutarde, ketchup).

2. La viscosité dynamique des gaz augmente avec la température (en  $\sqrt{T}$ ) tandis que celle des liquides décroît de manière approximativement exponentielle avec la température.

**Les fluides RHÉOÉPAISSISSANTS** Sous une contrainte forte le fluide se contracte et devient dur mais s'écoule sous une contrainte faible. C'est l'inverse du comportement précédent et cette occurrence est plus rare, quoi que ce soit le cas du fluide non newtonien le plus connu : la suspension de fécule de maïs (Maïzena).

## 3.2 Équation de Navier-Stokes

### 3.2.1 Établissement de l'équation

On considère une particule fluide de masse  $dm = \rho d\tau$ , qui est constante dans le temps par définition de la particule fluide. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la particule fluide et en divisant par le volume on obtient :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_e + \vec{f}_s \quad (3.4)$$

où  $\vec{f}_e$  est la résultante des forces extérieures par unité de volume (y compris les forces d'inertie si le référentiel choisi n'est pas galiléen) et  $\vec{f}_s$  l'équivalent volumique des forces de surface (dues au reste du fluide).

Pour un fluide newtonien et incompressible, vu les équations (??) et (3.2), on obtient l'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_e - \overrightarrow{\text{grad}}(p) + \eta \Delta \vec{v}. \quad (3.5)$$

#### Remarque

L'équation (3.4) est valable pour un fluide newtonien ou non, compressible ou non. Elle est simplement la traduction mathématique d'un bilan de quantité de mouvement. Le passage à (7.1) en revanche nécessite de faire des hypothèses supplémentaires sur le fluide et l'écoulement pour réduire la force de viscosité à son expression la plus simple  $\eta \Delta \vec{v}$ .

### 3.2.2 Interprétation physique des différents termes

Dans de très nombreux problèmes  $\vec{f}_e$  est soit nulle si on néglige tous les champs extérieurs, soit égale au poids *volumique* de la particule de fluide  $\vec{P}_{dr} = \rho \vec{g}$ . On pourrait aussi imaginer, si le fluide est conducteur ou chargé, voir apparaître une force électromagnétique en volume par exemple...

À gauche, le terme  $\rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  garde l'appellation de « terme convectif ». Il traduit la variation de quantité de mouvement due au déplacement de la particule fluide vers des zones de vitesse plus ou moins importante. Le terme  $\rho \partial \vec{v} / \partial t$  est toujours appelé « terme local » ou « instationnaire » et traduit les variations de quantité de mouvement dues aux variations locales du champ de vitesse dans le temps.

À droite, le terme  $\eta \Delta \vec{v}$  est appelé terme diffusif et le terme  $-\overrightarrow{\text{grad}}(p)$  est appelé terme de pression.

L'équation de Navier-Stokes comporte 3 équations scalaires pour 4 inconnues (les trois composantes de vitesse et la pression). La résolution complète d'un problème d'hydrodynamique implique donc d'utiliser, pour les écoulements incompressibles, l'équation de continuité, dite aussi équation de conservation de la masse (1.6)

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Pour les écoulements compressibles en revanche il faudra étudier l'effet de la pression sur le fluide, et couplé l'hydrodynamique à la thermodynamique. Nous ne le ferons qu'à l'occasion de l'étude des ondes acoustiques, au chapitre 8.

#### Remarque

Pour un écoulement incompressible, la dynamique est découplée de la thermodynamique. La pression y est définie à une constante près (éventuellement imposée par les conditions aux limites) dont la plupart des

résultats ne dépendent pas. Le seul moment dans ce cours où on couplera hydrodynamique et thermodynamique sera lors de l'étude des ondes acoustiques au chapitre 8.

### 3.3 Conditions aux limites

Ayant déterminé les équations du mouvement la solution finale d'un problème d'hydrodynamique est obtenue en incluant les différentes conditions limites. Il en existe de deux types :

**Les conditions limites cinématiques** qui résultent de contraintes imposées à la vitesse du fluide.

**Les conditions limites dynamiques** qui résultent de contraintes imposées aux forces.

#### Attention !

La mémorisation de tous les cas de conditions limites est un peu pénible et fastidieuse. Il s'agit essentiellement de comprendre l'idée générale de ce qui est imposé aux fluides, et de retenir les cas les plus usuels. Par ailleurs on donne volontairement à ce stade des conditions limites portant sur la tension de surface même si on ne l'a pas encore introduite. Cela permet d'avoir toutes les conditions limites au même endroit dans le cours, d'autant que vous n'êtes pas des élèves tout à fait novices et avez déjà une idée assez claire de ce qu'est  $\gamma$ ...

#### 3.3.1 Conditions aux limites cinématiques

La principale condition cinématique à avoir en tête est la suivante, énoncée pour une paroi solide immobile. C'est le cas qui se présente le plus souvent.

**Surface solide immobile** Si le matériau est non poreux, alors les particules fluides ne peuvent pénétrer dans le solide et la composante de la vitesse normale à la paroi doit être nulle<sup>3</sup> :

$$\vec{v}_\perp = \vec{0} \quad \text{i.e.} \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0. \quad (3.6)$$

De plus, pour un fluide visqueux, on observe expérimentalement que les molécules de fluide au voisinage de la paroi sont en moyenne immobiles, surtout si la surface est un peu rugueuse ou si les molécules sont adsorbées<sup>4</sup> sur la paroi. La vitesse tangentielle d'une particule fluide (au sens mésoscopique) est donc nulle. C'est ce que l'on appelle la CONDITION DE NON-GLISSEMENT SUR UNE PAROI SOLIDE :

$$\vec{v}_\parallel = \vec{0} \quad \text{pour les fluides visqueux.} \quad (3.7)$$

#### Attention !

Pour les FLUIDES PARFAITS, dont la viscosité est rigoureusement nulle, cette condition n'est pas imposée.

**Surface solide mobile** Si la paroi solide se déplace les conditions aux limites sont physiquement les mêmes à condition de les écrire *dans le référentiel de la paroi* :  $\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}}$  pour un fluide réel, mais seulement  $v_{\perp, \text{fluide}} = v_{\perp, \text{paroi}}$  pour un fluide parfait.

3. En toute rigueur il faut annuler le flux de matière  $Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$  et ce pour tout élément de surface.

4. Définition : retenu, fixé à la surface.

**Surface déformable** Soit une surface déformable, par exemple entre deux fluides 1 et 2. D'abord, la vitesse normale à l'interface en tout point doit être la même dans les deux fluides sans quoi on aurait un espace ou un recouvrement au niveau de la paroi :

$$(v_1)_\perp = (v_2)_\perp. \quad (3.8)$$

Si de plus les deux fluides sont visqueux la conditions doit être aussi portée sur les vitesses tangentielles et on peut écrire en tout point

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad \text{pour les fluides visqueux.} \quad (3.9)$$

### 3.3.2 Conditions aux limites dynamiques

**Pour les fluides parfaits** les conditions ne peuvent porter que sur la pression (il n'y a par définition pas de contrainte visqueuse).

- Pour une surface solide :  $P_{\text{fluide}} = P_{\text{paroi}}$  ;
- Pour une interface plane entre deux fluides :  $P_{\text{fluide 1}} = P_{\text{fluide 2}}$  ;
- Pour une interface courbée entre deux fluides : on aura d'ici la fin de ce cours l'équation de Laplace (voir chapitre 9) :

$$P_1 - P_2 = \gamma \left( \frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} \right),$$

où  $\gamma$  est la tension de surface,  $R'$  et  $R''$  les rayons de courbure de l'interface dans deux plans orthogonaux. La pression est plus élevée du côté concave de l'interface.

**Pour les fluides réels** il faut égaliser les contraintes normales *et* tangentielles. Ce développement n'est pas au programme on le donne ici à titre indicatif.

- Pour une paroi solide orthogonale à  $Oz$  : seules les composantes  $\partial v_x / \partial z$  et  $\partial v_y / \partial z$  peuvent ne pas être nulles et la contrainte à la paroi a alors pour composantes :  $\sigma_{xz} = \eta \partial v_x / \partial z$ ,  $\sigma_{yz} = \eta \partial v_y / \partial z$  et  $\sigma_{zz} = -p$ .
- Pour une interface entre deux fluides sans tension de surface : on doit avoir en tout point de l'interface dont la normale est  $\vec{n}$  l'égalité  $[\sigma_1](\vec{n}) = [\sigma_2](\vec{n})$ . L'égalité des contraintes tangentielles s'écrit

$$\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \quad \text{et} \quad \eta_1 \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_{2y}}{\partial z}.$$

- Cas particulier d'une surface libre : Une interface est dite **LIBRE** si la contrainte tangentielle est nulle ou négligeable. C'est le cas notamment si la viscosité dynamique d'un des fluides est nettement supérieure à l'autre, par exemple dans le cas eau/air. On alors

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0.$$

- Pour une interface entre deux fluides avec tension de surface : il faut coupler le cas précédent qui imposait une contrainte tangentielle à la contrainte normale donnée par la loi de Laplace. La présence d'un gradient de tension de surface pourra donner à son tour une nouvelle contrainte tangentielle, menant par exemple à l'effet Marangoni mais on s'éloigne nettement du cadre du programme.

## 3.4 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est l'outil essentiel de la mécanique des fluides pour appliquer la bonne forme de l'équation de Navier-Stokes (7.1) au problème étudié. Il permet de jauger l'importance relative des différents termes, en particulier celle de la viscosité.



### 3.4.1 Par adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

On considère un écoulement incompressible d'un fluide newtonien sur une échelle caractéristique  $L$  et de vitesse typique  $U$ . La masse volumique  $\rho$  est constante et uniforme. On veut ADIMENSIONNER l'équation de Navier-Stokes.

En divisant par  $\rho U^2/L$  il vient finalement :

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\eta}{\rho UL} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}.$$

Toutes les dimensions sont donc contenues dans le nombre non dimensionné appelé NOMBRE DE REYNOLDS

$$\boxed{Re = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu}}. \quad (3.10)$$

**Remarque**

Si deux écoulements ont la même géométrie et le même  $Re$ , alors les champs de vitesse vérifient la même équations. La forme de l'écoulement dépend donc uniquement de la géométrie (incluant le type de conditions aux limites) à un facteur d'échelle près, et du nombre de Reynolds.

**3.4.2 Par rapport de deux termes**

Le nombre de Reynolds peut aussi être vu comme le rapport en ordre de grandeur des termes convectif et diffusif :

$$Re = \frac{\left\| \rho \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right\|}{\left\| \eta \Delta \vec{v} \right\|} \approx \frac{\frac{\rho U^2}{L}}{\frac{\eta U}{L^2}} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}.$$

En toute rigueur cette interprétation n'est pas valable pour les écoulements parallèles pour lesquels  $\left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \vec{0}$  (on y reviendra), mais l'interprétation reste utile pour comprendre le sens du nombre de Reynolds. En particulier la longueur  $L$  est la longueur typique sur laquelle la vitesse varie. Dans les géométries complexes, il peut y avoir plusieurs nombres de Reynolds pertinents.

**3.4.3 Par rapport de deux temps caractéristiques**

Ainsi,

$$Re = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{adv}}} = \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{U L}{\nu}.$$

**Attention !**

Le phénomène prédominant est toujours celui qui a le temps caractéristique le plus court puisque cela implique qu'il aura plus rapidement de l'effet sur le système que les autres phénomènes.

**3.4.4 Ordre de grandeur**

Ainsi, plus le nombre de Reynolds est grand, plus

- le terme  $\Delta \vec{v}$  peut être négligé dans l'équation de Navier-Stokes. Si  $Re$  est petit, au contraire, il domine les autres termes ;
- le terme  $\rho \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$  domine l'écoulement. Si  $Re$  est petit, au contraire, il est négligeable ;
- le temps de diffusion est grand, c'est à dire que l'écoulement est dominé par l'advection.

L'écoulement à grand nombre de Reynolds est donc un écoulement fortement non linéaire, rapide, dans lequel la quantité de mouvement est déplacée dans le fluide par advection c'est-à-dire déplacement macroscopique des particule fluide. C'est typiquement un écoulement turbulent. Au contraire, l'écoulement à faible nombre de Reynolds est un écoulement linéaire, calme et lent, dans lequel les couches de fluides glissent les unes sur les autres et la quantités de mouvement est déplacée par diffusion.

Il est donc intéressant (voire primordial) d'estimer le nombre de Reynolds associé à chaque écoulement étudié. Donnons quelques exemples.

Situation	$U$ (m · s <sup>-1</sup> )	$L$ (m)	$Re$
Homme qui marche			
Homme qui nage			
Mouche qui vole			
Bactérie qui nage			

TABLE 3.2 – Ordre de grandeur du nombre de Reynolds  $Re = UL/\nu$  dans différents écoulements.

### 3.5 Vue d'ensemble de la suite du cours

L'équation de Navier-Stokes, répétons-le, est non-linéaire donc extrêmement est difficile à résoudre dans le cas général. On va donc étudier dans la suite du cours différents cas particuliers qui permettent des simplifications et peuvent ainsi être résolus et étudiés :

- Les écoulement parallèles, pour lesquels la géométrie impose que le terme non linéaire soit rigoureusement nul  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0}$  et ce quel que soit l'ordre de grandeur de la vitesse.
- Les écoulement dominés pas la viscosité, pour lesquels  $\nu$  est grand de sorte que  $Re$  est faible et le terme non-linéaire, bien non nul, est négligé.
- Les écoulements en milieu confinés (typiquement les milieux poreux) dans lesquels  $Re$  est à nouveau faible mais cette fois du fait que  $L$  est petit.
- Les écoulements parfaits, ou non-visqueux, dominés par l'inertie. En l'absence de viscosité l'énergie est conservée et cette nouvelle information permet l'étude des écoulements y compris en présence du terme non-linéaire.

## Annexe : Expression des équations en coordonnées cylindriques

Divergence :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) + f_r \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + f_\theta \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + f_z \end{aligned}$$

Tenseur des contraintes :

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{zr} = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{\theta z} = \eta \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right).$$

# Chapitre 4

## Écoulements parallèles

### 4.1 Définition et intérêt des écoulements parallèles

Les écoulements parallèles sont des écoulements unidirectionnels et incompressibles. Le champ de vitesse ne varie alors pas dans la direction transverse au plan de l'écoulement. En effet, si on écrit  $\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{u}_x + v_y(x, y, z)\vec{u}_y + v_z(x, y, z)\vec{u}_z$ , l'aspect unidirectionnel impose par exemple  $v_y = v_z = 0$  puis la condition d'incompressibilité ajoute

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = (v_x(y, z), 0, 0).$$

Comme les composantes  $v_y$  et  $v_z$  sont nulles, le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$  se réduit à sa composante selon  $x$  qui vaut

$$\left( (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right) \cdot \vec{u}_x = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x = 0.$$

L'équation de Navier-Stokes se ramène alors à :

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{= \vec{0} \text{ si l'écoulement est stationnaire}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{= \vec{0} \text{ écoulement parallèle}} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(p) + \nu \Delta \vec{v}. \quad (4.1)$$

Pour un écoulement parallèle, le champ de vitesse résulte exclusivement d'un équilibre entre le champ de pression et les forces de viscosité.

### 4.2 Écoulements de Couette

Commençons par l'étude des écoulements de Couette ayant pour point commun l'entraînement du fluide par une paroi.

#### 4.2.1 Écoulement de Couette plan

On cherche l'écoulement établi (indépendant du temps) entre deux plaques parallèles dont l'une se déplace dans son plan à la vitesse  $U_0$ . On suppose que l'on peut décomposer  $\vec{v} = (u(y), 0, 0)$  et on néglige la gravité.

L'équation de Navier-Stokes (4.1) se ramène alors dans les trois dimensions cartésiennes à :

Les deux dernières équations impliquent que  $p$  ne dépend ni de  $y$  ni de  $z$ . Comme de plus  $u$  ne dépend pas de  $x$ ,  $\partial p / \partial x$  non plus d'après la première équation.  $\partial p / \partial x$  est donc une constante qui sera nulle s'il n'y a pas de gradient de pression imposé à l'infini par les conditions aux limites ce que nous le supposons ici. L'intégration par rapport à  $y$  de la première équation donne  $u(y) = \alpha y + \beta$ . En tenant enfin compte des conditions aux limites visqueuses  $u = 0$  en  $y = 0$  et  $u = U_0$  en  $y = h$  :

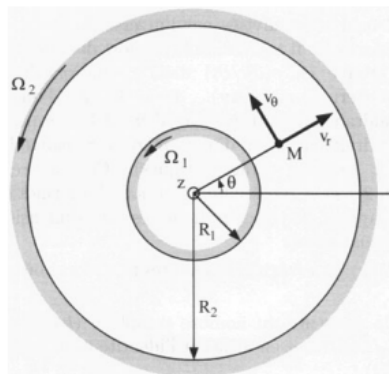
$$u(y) = U_0 \frac{y}{h} . \quad (4.2)$$

Le gradient de vitesse est constant partout dans l'écoulement.

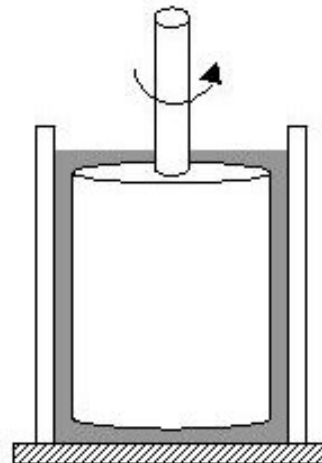
#### 4.2.2 Écoulement de Couette circulaire

L'écoulement de Couette plan est irréalisable en pratique puisqu'un tel dispositif ne saurait être débarrassé des effets de bords. Une astuce pour produire un écoulement complètement équivalent est de courber les plans jusqu'à obtenir un écoulement cylindrique (dit en termes savants on passe de *conditions aux limites strictes* à des *conditions aux limites périodiques*).

On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible de viscosité dynamique  $\eta$  compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  tournant autour de leur axe commun  $Ox$  avec des vitesses angulaires respectives  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On suppose qu'aucun gradient de pression n'est appliqué extérieurement et on décrit le système en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  comme sur la figure 4.1a. On cherche à déterminer les composantes  $v_r$ ,  $v_\theta$  et  $v_x$  de la vitesse du fluide.



(a) Notations pour l'étude du dispositif de Couette en géométrie cylindrique.



(b) Principe du rhéomètre de Couette. Un fluide est cisailé entre deux cylindres et le couple exercé sur le cylindre immobile est mesuré.

L'écoulement observé expérimentalement (au moins aux faibles vitesses) est indépendant de  $x$  et  $\theta$ . Aussi,  $v_x$

est nul en l'absence de gradient de pression axial. Pour exprimer  $v_r$ ,

Reste à déterminer  $v_\theta$ .

La première équation traduit la force d'inertie centrifuge due à la courbure des trajectoires qui est exactement compensée par l'établissement d'un gradient radial de pression. La résolution de la seconde équation passe par une recherche des solutions en puissances de  $r$  et il vient :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}, \quad (4.3)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes imposées par la rotation des cylindres intérieur ( $v_\theta r = R_1 = R_1\Omega_1$ ) et extérieur ( $v_\theta(r = R_2) = R_2\Omega_2$ ). Finalement,

$$\vec{v} = \left( \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \right) \vec{u}_\theta. \quad (4.4)$$

**Remarque**

- lorsque le rayon des deux cylindres tend vers l'infini à  $R_2 - R_1$  constante on retrouve le champ de vitesse correspondant à l'écoulement de Couette plan ;
- si  $\Omega_1 = \Omega_2$ , alors  $v = \Omega r$ , ce qui correspond à un mouvement de rotation en bloc du fluide ;
- dans le cas où seul le cylindre intérieur tourne, et pour une vitesse de rotation  $\Omega_1$  du cylindre intérieur supérieure à une valeur critique  $\Omega_c$ , l'écoulement de Couette est instable. Il apparaît alors un écoulement secondaire sous forme de rouleaux toroïdaux. Cette instabilité, dite de Taylor-Couette, peut être observée aussi dans le cas où les deux cylindres sont en rotation avec un seuil qui dépend à la fois de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

**4.2.3 Application à la mesure du viscosité**

La mise en mouvement relative des cylindres intérieur et extérieur ne se fait évidemment pas sans appliquer une force. Dans une situation simple où le cylindre intérieur est mis en mouvement et le cylindre extérieur est tenu fixe on peut évaluer la force que le liquide visqueux exerce sur une portion  $dS = LR_1 d\theta$  du cylindre intérieur via l'expression

$$\vec{dF} = \eta \frac{dv_\theta(r)}{dr} dS \vec{u}_\theta = -\eta \Omega_1 \frac{R_1}{R_2 - R_1} dS \vec{u}_\theta.$$

Cette force possède un moment selon l'axe  $Ox$  égal à

$$\vec{dM} = \vec{HM} \wedge \vec{dF} = -\eta \Omega_1 \frac{R_1^2}{R_2 - R_1} dS \vec{u}_x = -\eta \Omega_1 \frac{R_1^3}{R_2 - R_1} L d\theta \vec{u}_x.$$

Par intégration selon  $\theta$  on détermine le moment total exercé par le fluide sur le cylindre intérieur :

$$\vec{M} = -\eta \frac{2\pi LR_1^3}{R_2 - R_1} \vec{\Omega}_1.$$

Ce moment, opposé à la rotation du cylindre, traduit la résistance des « frottements fluides ». Connaissant les caractéristiques cinématiques du dispositif, et ayant mesuré le moment subit par le cylindre intérieur, on déduit aisément la viscosité du fluide  $\eta$ . On peut d'ailleurs faire la mesure en appliquant différents taux de cisaillement pour tester le caractère newtonien du fluide.

**4.2.4 Écoulement de Couette en régime variable****Exercice n°19 : Écoulement induit par une plaque oscillante**

On considère une plaque plane supposée infinie et confondue avec le plan  $xOy$  surmontée d'un fluide incompressible de viscosité dynamique  $\eta$ . Le fluide occupe tout le demi-espace  $z > 0$ . La plaque est animée d'un mouvement oscillatoire dans son plan à la pulsation  $\omega$ , que l'on écrit  $\vec{v}_{\text{plaque}} = v_0 \cos(\omega t)$ . Donner le mouvement du fluide (on pourra chercher des solutions sous la forme  $v(z, t) = f(z)e^{i\omega t}$ ).

L'équation de diffusion obtenue dans cet exercice est tout à fait généralisable et le coefficient de diffusion est simplement  $\nu$  comme nous l'avons déjà évoqué plus haut.

**4.3 Écoulements de Poiseuille****4.3.1 Écoulement de Poiseuille plan**

Remarque : en présence de gravité, et pour une masse volumique  $\rho$  constante, on définit la pression ..... par  $p + \rho g z$  où  $z$  est l'axe vertical orienté vers le haut (ce concept est au programme de BCPST2). Pour prendre en compte l'effet de la gravité, il faut remplacer la différence de pressions par la différence des pressions motrices.



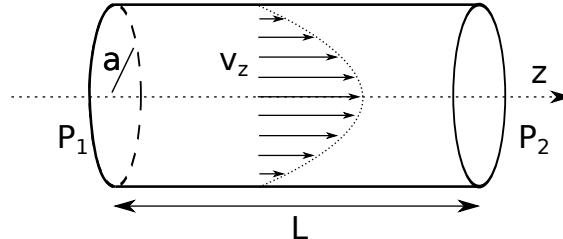
### 4.3.2 Écoulement de Poiseuille cylindrique

L'écoulement de Poiseuille cylindrique est important, notamment parce que c'est celui que vous étudiez expérimentalement en TP *Fluides*. Il est décrit dans l'exercice suivant. On y démontre notamment l'expression de la vitesse  $v_z$  et du débit  $Q$  :

$$v_z = \frac{1}{4} \frac{P_2 - P_1}{\eta L} (r^2 - a^2) \quad \text{et} \quad Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{P_2 - P_1}{L} a^4. \quad (4.5)$$

#### Exercice n°20 : Écoulement de Poiseuille cylindrique

Le but de cet exercice est de déterminer analytiquement la formule de la vitesse et du débit d'un écoulement de Poiseuille à l'intérieur d'une conduite cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $a$  représentée sur la figure suivante et dont les parois sont immobiles.



On considère un fluide de viscosité dynamique  $\eta$ . On applique une pression  $P_1$  à une extrémité de la conduite, et une pression  $P_2$  à l'autre extrémité. On néglige la gravité. L'écoulement est parallèle et stationnaire :  $\vec{v} = v_z \vec{e}_z$ .

1. Dans quelle gamme de nombre de Reynolds est valable la loi de Poiseuille ?
2. De quelle variable(s) dépend  $v_z$  ? Justifier.
3. Justifier que  $p$  ne dépend que de  $z$ . Justifier que  $\partial p / \partial z$  soit indépendant de  $z$ .
4. Calculer le champ de vitesse.
5. Calculer le débit volumique.

**Résistance hydraulique** Par analogie avec l'électrocinétique  $R = \Delta V / I$  ou la thermique  $R_{th} = \Delta T / \Phi$ , on définit la résistance hydraulique  $R_h$  par :

$$R_h = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi a^4} \quad (4.6)$$

Cette résistance hydraulique provoque une *perte de charge*. La chute de pression liée à l'écoulement d'un fluide dans un canal de faible épaisseur est utilisée dans les détendeurs (voir figure 4.1). La géométrie est plus proche d'un écoulement 2D. La forte variation de la chute de pression avec l'épaisseur permet de maintenir la pression de sortie constante pour une large gamme de débits, tout en limitant l'encombrement du dispositif.

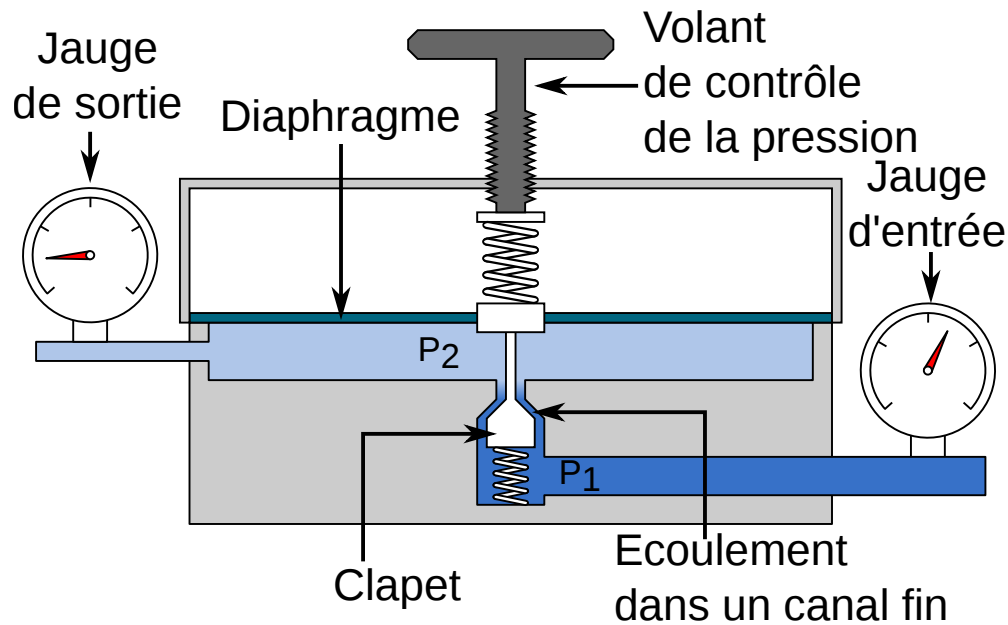


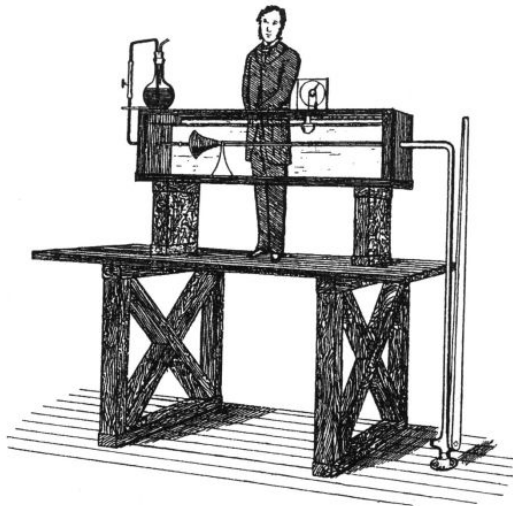
FIGURE 4.1 – Détendeur à simple détente (d'après Wikipédia). La chute de pression a lieu dans le canal d'épaisseur fine. Cette épaisseur est liée à la position du clapet. Si la pression  $P_2$  augmente, le diaphragme est poussé vers le haut, et le clapet se ferme. Au contraire, si la pression  $P_2$  diminue, le diaphragme est poussé vers le bas, et le clapet s'ouvre. La perte de charge dans le canal fin est moins importante, et  $P_2$  augmente. Il s'agit d'un système qui permet de maintenir  $P_2$  quasiment fixe lorsque le débit de sortie varie.

#### 4.4 Stabilité des écoulements parallèles

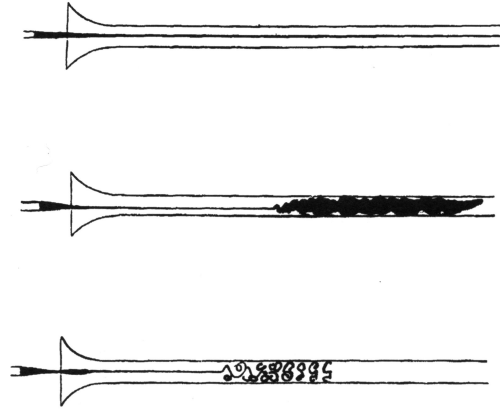
Ces écoulements parallèles sont présentés comme valable à tout nombre de Reynolds puisque le terme non-linéaire disparaît rigoureusement du fait même de la géométrie. Pourtant, lorsque Osborne Reynolds mène son expérience historique consistant à faire couler de l'eau dans un tube pour différents rayons et différentes vitesses (voir dispositif figure 4.2a) il met en évidence des conditions expérimentales pour lesquelles un écoulement turbulent apparaît (voir résultats figure 4.2b)

La figure 4.2b présente un schéma des observations d'O. Reynolds concernant les écoulements dans des tubes. Pour des nombres de Reynolds suffisamment faibles, l'écoulement est laminaire et parallèle. Pour des nombres de Reynolds élevés, l'écoulement devient turbulent. O. Reynolds a montré que c'est bien le nombre de Reynolds (qui a été appelé ainsi par la suite), défini dans ce cas à partir du diamètre du tuyau et de la vitesse moyenne, qui contrôle la transition entre les régimes laminaires et turbulents. En général la transition a lieu pour  $Re \sim 2000$ .

Cette transition provient du fait que l'écoulement de Poiseuille est instable : lorsqu'en un point quelconque du tube la vitesse est subitement modifiée (ce qui peut toujours arriver du fait des fluctuations) l'écoulement n'est immédiatement plus parallèle. On peut alors montrer que si la fluctuation de vitesse dépasse un certain seuil (qui est d'autant plus faible que le Reynolds est grand) elle n'est pas amortie par le reste de l'écoulement, se développe, et engendre une transition vers la turbulence. Ceci s'observe d'ailleurs expérimentalement : si on soigne l'expérience, notamment en étant toute perturbation à l'entrée et le long du tube, on peut garder un écoulement laminaire jusqu'à un  $Re$  beaucoup plus grand. Expérimentalement l'expérience a été réalisée jusqu'à  $Re \sim 100\,000$  et il n'y a théoriquement aucune limite. Voir pour aller plus loin B.Hof et al. (2011), *the onset of turbulence in pipe flow*, Science ou F. Charru, *Instabilités hydrodynamiques*, EDP Sciences (2007).



(a) Dispositif expérimental de l'expérience.



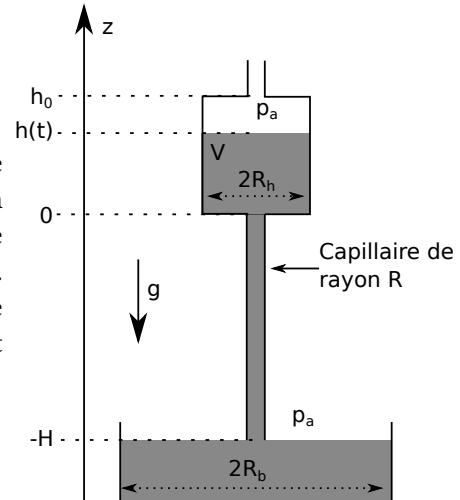
(b) Résultats de l'écoulement dans un tuyau. La vitesse du fluide croît de haut en bas : écoulement laminaire, écoulement turbulent, écoulement turbulent en vue instantanée.

FIGURE 4.2 – Expérience historique d'O. Reynolds sur les écoulement de Poiseuille.

## Exercices supplémentaires

### Exercice n°21 : Viscosimètre de Ubbelohde

On considère un viscosimètre capillaire constitué d'un long tube de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  surmonté d'un réservoir de rayon  $R_h \gg R$  et de section  $S_h = \pi R_h^2$ . Le capillaire plonge dans un autre réservoir de rayon  $R_b \gg R_h$  comme présenté sur la figure ci-contre. Le liquide est supposé newtonien. On note  $\rho$  sa masse volumique et  $\eta$  sa viscosité dynamique. La pression dans l'air, notée  $p_a$ , est supposée uniforme.

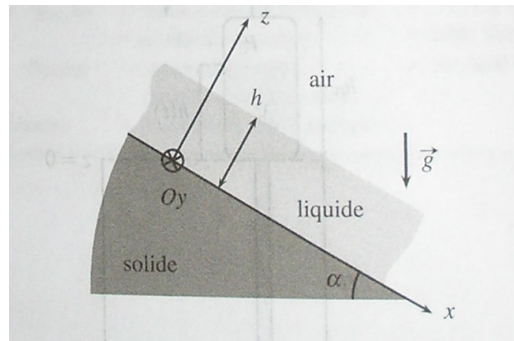


Viscosimètre de Ubbelohde.

1. On suppose que tout au long du tube de rayon  $R$  l'écoulement est un écoulement de Poiseuille. Donner la condition pour que cette hypothèse soit vérifiée.
2. Estimer la pression motrice en haut et en bas du tube de rayon  $R$ .
3. Dédire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par  $h$  et la résoudre pour exprimer  $h(t)$ . On notera  $h_0$  la hauteur initiale.
4. On note  $\Delta t$  le temps de vidange du réservoir du haut (celui dont le rayon vaut  $R_h$ ). Montrer que ce temps est proportionnel à la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide selon  $\nu = K\Delta t$ . Donner l'expression de  $K$ .
5. On considère un viscosimètre commercial caractérisé par  $K = 0,003 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . En déduire le temps de vidange pour de l'eau.

6. Expliquer et faire un schéma de deux autres méthodes de mesures de la viscosité. Quels sont les avantages et les inconvénients de ces différentes méthodes ?

### Exercice n°22 : Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné



Écoulement sur un plan incliné.

On considère l'écoulement d'un liquide newtonien de viscosité  $\eta$  et masse volumique  $\mu$  sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (voir figure ??). L'épaisseur de la couche de liquide est supposée uniforme et elle est notée  $h$ . L'écoulement est stationnaire.

1. Donner l'expression du nombre de Reynolds associé à cet écoulement. On considérera dans la suite que ce nombre est petit devant 1.
2. Quelle est la forme du champ de vitesse ?
3. Donner les équations qui décrivent le mouvement du liquide.
4. Donner les conditions aux limites vérifiées par le fluide. On suppose que la viscosité dynamique de l'air est négligeable devant celle du liquide. Utiliser cette hypothèse pour simplifier une des conditions aux limites.
5. Calculer les champs de vitesse et de pression.
6. Calculer le débit par unité de longueur selon  $Oy$ .

### Exercice n°23 : Écoulements dans le système artériel

Étage	Aorte	Grosses artères	Branches artérielles	Artéριοles	Capillaires
$n$	1	40	7 100	$1,6 \times 10^8$	$5,5 \times 10^9$
$d(\text{cm})$	2,6	0,8	0,06	0,002	0,0009
$L(\text{cm})$	34	12,5	12,5	0,25	0,086

Paramètres du système artériel humain.  $n$  : nombre de vaisseaux sanguins de l'étage considéré.  $d$  : diamètre des vaisseaux sanguins.  $L$  longueur moyenne des vaisseaux sanguins de l'étage considéré.

On considère le système artériel humain (voir table 4.4). Ce système est composé de plusieurs «étages» : les vaisseaux de chaque étage sont en parallèles entre eux, et en série avec les autres étages. On note  $\rho$  la masse volumique du sang, assimilée à celle de l'eau, et  $\eta = 3 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  sa viscosité dynamique. Le débit sanguin est  $Q = 5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ .

1. Calculer le nombre de Reynolds associé à chaque étage, et commenter.
2. En supposant que l'écoulement dans les vaisseaux est un écoulement de Poiseuille, en déduire la perte de charge associée à chaque étage.
3. Donner quelques facteurs qui font que la modélisation des écoulements sanguins à l'aide de la loi de Poiseuille n'est qu'une approximation grossière.