

Correction des exercices du chapitre 4

Correction n°19 : Écoulement induit par une plaque oscillante

L'origine du mouvement étant selon \vec{u}_x , et avec l'invariance par translation dans les directions x et y , on est amenés à chercher le champ de vitesses sous la forme $\vec{v} = v_x(z)\vec{u}_x$. On projette l'équation de Navier-Stokes selon \vec{u}_x pour obtenir :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}.$$

Du fait de l'invariance par translation selon x , $\partial p / \partial x = 0$. On obtient ainsi une équation de diffusion pour la vitesse

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}.$$

Comme suggéré par l'énoncé, on cherche des solutions en notation complexe sous la forme $v_x(z, t) = f(z)e^{j\omega t}$. Injecté dans l'équation il vient :

$$j\omega f(z) = \nu f''(z) \Rightarrow f''(z) = \frac{j\omega}{\nu} f(z).$$

Il faut déjà extraire la racine carré de j . En passant en notation exponentielle, $j = e^{j\pi/2}$ dont la racine est immédiatement $e^{j\pi/4}$ qui s'écrit, en repassant en notation usuelle $(1+j)/\sqrt{2}$. Les solutions pour la fonction f s'écrivent donc :

$$f(z) = A \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta}\right) + B \exp\left(-(1+j)\frac{z}{\delta}\right) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}},$$

homogène à une distance. Cependant, le milieu est semi-infini dans la direction z , on doit donc rejeter la solution en $\exp(z/\delta)$ qui diverge pour $z \rightarrow +\infty$ donc $A = 0$. On obtient finalement en notation réelle, en prenant en compte que $v_x(z=0) = v_0 \cos(\omega t)$:

$$v_x(z) = v_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).$$

On a donc une propagation d'onde atténuée sur une longueur typique δ . On peut faire un parallèle avec le phénomène d'ondes thermiques en thermodynamique, ou l'effet de peau en électromagnétisme. On obtient d'ailleurs des expressions similaires pour les distances δ .

Correction n°20 : Écoulement de Poiseuille cylindrique

1. On pose le nombre de Reynolds $Re = (2aU)/\nu$, où U est la vitesse moyenne et ν la viscosité cinématique du fluide. La loi de Poiseuille est valide jusqu'à un nombre de Reynolds d'environ 2000.

2. Comme l'écoulement est parallèle, v_z ne dépend pas de z . Par invariance selon θ , v_z ne dépend pas de θ (cette symétrie est respectée car il s'agit d'un écoulement à faible nombre de Reynolds où les équations sont linéaires). La vitesse ne dépend que de r .

3. Les composantes selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ de l'équation de Navier-Stokes en cylindrique (voir annexe du chapitre précédent) enseignent que p ne dépend ni de r ni de θ , car $v_r = v_\theta = 0$. En utilisant que v_z ne dépend que de z , la troisième équation de Stokes donne :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad (9.15)$$

Si on dérive cette équation par rapport à z , en intervertissant les dérivées par rapport aux différentes variables :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad (9.16)$$

car v_z ne dépend pas de z . $\frac{\partial p}{\partial z}$ est bien indépendant de z et vaut :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad (9.17)$$

4. On intègre l'équation (9.15).

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{P_2 - P_1}{L} \frac{r^2}{2} + K \quad (9.18)$$

avec $K = 0$ obtenu en $r = 0$. On intègre une fois de plus :

$$v_z = \frac{1}{\eta} \frac{P_2 - P_1}{L} \frac{r^2 - a^2}{4} \quad (9.19)$$

où on a utilisé la condition de non-glissement en $r = a$.

5. Le débit volumique s'écrit :

$$\begin{aligned} Q &= \int r \, dr \, d\theta \, v_z(r) = 2\pi \int_0^a \frac{1}{\eta} \frac{P_2 - P_1}{L} \frac{r^2 - a^2}{4} r \, dr \\ &= \frac{\pi}{2\eta} \frac{P_2 - P_1}{L} \left[\frac{r^4}{4} - a^2 \frac{r^2}{2} \right]_0^a \\ Q &= \frac{\pi}{8\eta} \frac{P_2 - P_1}{L} a^4. \end{aligned}$$

Correction n°21 : Viscosimètre de Ubbelohde

1. On appelle V la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section. L'écoulement est un écoulement de Poiseuille dans tout le tube si le nombre de Reynolds associé $Re = V2R/\nu < 1$, avec $\nu = \eta/\rho$.

2. Montrons qu'on peut conserver la formule de Poiseuille au prix d'une petite modification. L'écoulement est considéré comme parallèle et permanent, donc on a l'équation (dite *équation de Stokes*)

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}.$$

La projection sur les axes \vec{e}_r et \vec{e}_θ donne $\partial p / \partial r = 0$ et $\partial p / \partial \theta = 0$, donc la pression ne dépend que de z . De plus, la projection selon \vec{e}_z donne (l'expression du laplacien en cylindrique serait rappelée)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

On peut intégrer le terme de pesanteur dans la dérivée verticale, et ainsi réécrire

$$\frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial z} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

On a à gauche une fonction de z seulement tandis que le terme de droite ne dépend que de r , les deux sont donc constants. Le problème est donc exactement le même que l'écoulement de Poiseuille cylindrique horizontal, à condition de remplacer p par la pression *dynamique* ou *motrice* $p + \rho g z$. La constante est prise égale à

$$\frac{p_0 + \rho g \times 0 - (p_A - \rho g H)}{H} = \frac{p_0 - p_A + \rho g H}{H},$$

gradient linéaire de la pression motrice entre le point d'altitude 0 et celui d'altitude $-H$.

On suppose par ailleurs que dans le cylindre du haut le débit est suffisamment faible (section importante), de sorte qu'on peut supposer que la surface ne se déforme pas et appliquer la loi barométrique pour obtenir que $p_0 = p_A + \rho g h(t)$. Le gradient linéaire s'écrit donc finalement $\rho g(H + h(t))/H$.

3. Dès lors, on peut reprendre la formule du débit de Poiseuille en remplaçant $\frac{p_2 - p_1}{L}$ par $\frac{\rho g(H + h(t))}{H}$, ce qui donne

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\rho g(H + h(t))}{H}.$$

Ce débit doit être égal à la variation de volume dans le récipient supérieur, on a donc

$$Q = \frac{dV}{dt} = -S_h \frac{dh}{dt}, \quad \text{le moins tenant compte du fait que } h \text{ diminue.}$$

Finalement, l'équation différentielle qui régit l'évolution de la hauteur $h(t)$ s'écrit

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi R^4}{8\eta S_h} \frac{\rho g(H + h)}{H} = -\frac{h + H}{\tau} \quad \text{où on a noté } \tau = \frac{\pi R^4}{8\eta S_h H}.$$

La solution de l'équation homogène est $A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, la solution particulière $-H$, et avec la condition initiale $h = h_0$, on a finalement

$$h(t) = (h_0 + H) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - H.$$

4. Dès lors, on peut estimer le temps de vidage Δt tel que

$$h(\Delta t) = 0 \Rightarrow \Delta t = \frac{8HS_h}{\pi g R^4} \ln\left(1 + \frac{h_0}{H}\right) \nu.$$

On pose p_0 la pression en $z = 0$ dans le liquide. La pression motrice en haut du tube vaut $p_h = p_0 + \rho g h$, et celle en bas du tube : $p_b = p_0 - \rho g H$.

5. On a pour l'eau :

$$\Delta t = \frac{\nu}{K} = \frac{10^{-6}}{3 \times 10^{-3} \times (10^{-3})^2} = 330 \text{ s} \quad (9.20)$$

6. Une méthode pour mesurer une viscosité est d'utiliser un viscosimètre de Couette comme présenté au cours du chapitre. On place un fluide entre deux cylindres de rayons assez proches, on impose la vitesse de rotation d'un des cylindres et on mesure le couple sur l'autre (immobile). Ce couple est proportionnel à la viscosité dynamique du fluide. Cette méthode est précise, fiable, mais nécessite un appareil coûteux. Il s'agit de la méthode de référence de mesure de viscosités.

Une autre méthode est de mesurer le temps de chute d'une bille dans un canal, et de comparer le résultat avec les résultats de calibration. Cette méthode est moyennement chère, difficile à interfacer et peu précise. Elle tend clairement à disparaître.

Les viscosimètres de Ubbelohde sont peu chers, difficile à interfacer et moyennement précis. Il s'agit d'une méthode encore couramment utilisée.

Correction n°22 : Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné

1. On définit le nombre de Reynolds par $Re = \mu U h / \eta$, où U est la vitesse moyenne.

2. Comme le nombre de Reynolds associé à l'écoulement est faible, l'écoulement possède les mêmes symétries que la géométrie. L'écoulement est donc parallèle : $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$. Vu l'équation d'incompressibilité, v_x ne dépend que de z .

3. L'écoulement est incompressible :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (9.21)$$

L'écoulement est stationnaire et à faible nombre de Reynolds, il vérifie ainsi l'équation de Stokes :

$$\eta \Delta \vec{v} - \operatorname{grad}(p) + \mu \vec{g} = \vec{0} \quad (9.22)$$

4. La condition de non-glissement à la paroi solide s'écrit :

$$\vec{v}(z = 0) = \vec{0} \quad (9.23)$$

L'interface entre le liquide et l'air est plane, et la pression dans l'air est supposée uniforme de valeur p_0 . D'où :

$$p(z = h^-) = p_0 \quad (9.24)$$

La condition sur les contraintes à l'interface liquide-air s'écrit :

$$\eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h^-} = \eta_{\text{air}} \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h^+} \quad (9.25)$$

La viscosité dynamique de l'air est supposée faible devant celle du liquide, et la condition précédente se réduit à :

$$\eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h^-} = 0 \quad (9.26)$$

Remarque : cette simplification n'est pas évidente, mais un calcul plus complet montre que $\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h^+}$ ne diverge pas lorsque η_{air} tend vers 0.

5. L'équation (9.22) projetée selon z donne :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \mu g \cos(\alpha) = 0 \quad (9.27)$$

où on a utilisé $\vec{v} = v_x(z) \vec{e}_x$. En utilisant l'équation (9.24), il vient :

$$p = p_0 + \mu g (h - z) \cos(\alpha) \quad (9.28)$$

L'équation (9.22) projetée selon x donne :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu g \sin(\alpha) = 0 \quad (9.29)$$

D'après l'équation (9.28), $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. En intégrant et en utilisant (9.26) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\mu g}{\eta} \sin(\alpha)(z - h) \quad (9.30)$$

En intégrant une fois de plus, et en utilisant la condition aux limites (9.23) :

$$v_x = -\frac{\mu g}{\eta} \sin(\alpha) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) \quad (9.31)$$

il s'agit d'un profil parabolique («demi-Poiseuille»).

6. Le débit q_{2D} par unité de longueur vaut :

$$\begin{aligned}
 q_{2D} &= \int_0^h v_x \, dz \\
 &= -\frac{\mu g}{\eta} \sin(\alpha) \int_0^h \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) dz \\
 &= -\frac{\mu g}{\eta} \sin(\alpha) \left[\frac{z^3}{6} - \frac{hz^2}{2} \right]_0^h \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\mu g}{\eta} \sin(\alpha) h^3
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

Correction n°23 : Écoulements dans le système artériel

Étage	Aorte	Grosses artères	Branches artérielles	Artéριοles	Capillaires
Re	1 400	110	8,3	$1,1 \times 10^{-2}$	$7,1 \times 10^{-4}$
ΔP (Pa)	7,6	7,8	$1,4 \times 10^3$	$1,0 \times 10^3$	$2,4 \times 10^2$

Résultats pour les différents étages.

1. On note U la vitesse moyenne dans les vaisseaux d'un étage. On pose Re le nombre de Reynolds, et ν la viscosité cinématique. On a :

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu} = \frac{Q}{\pi(d/2)^2 n \nu} = \frac{4Q}{\pi n d \nu} \tag{9.33}$$

Résultats : voir tableau.

2. On note ΔP la perte de charge dans un étage. Tous les vaisseaux d'un étage sont en parallèle. En utilisant la loi de Poiseuille :

$$\frac{Q}{n} = \frac{\pi}{128\eta} \frac{\Delta P}{L} d^4 \tag{9.34}$$

soit :

$$\Delta P = \frac{Q}{n} \frac{L}{d^4} \frac{128\eta}{\pi} \tag{9.35}$$

Résultats : voir tableau.

3. La modélisation est approximative parce que 1) l'écoulement est pulsé, 2) $\text{Re} \gg 1$ dans l'aorte, il y a des effets inertiels à cause du caractère pulsé de l'écoulement et dans les bifurcations avec les grosses artères, 3) les vaisseaux sont élastiques, 4) le sang est non-newtonien, 5) le diamètre des globules rouges vaut environ $7 \mu\text{m}$, ce qui est comparable au diamètre des capillaires : le sang ne peut plus être vu comme un fluide homogène à cette échelle.

