Correction des exercices du chapitre 5

Correction n°24 : Sédimentation d'une sphère dure dans un fluide

1. Prenons des paramètres typiques pour la sédimentation. Pour l'eau on a $\eta \simeq 1.10^{-3}$. La vitesse U_0 est au plus de l'ordre du $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et la masse volumique de la bille est généralement comparable à celle de l'eau $\rho_s \simeq 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$. On a donc

$$Re < 1 \iff L < \frac{\eta}{\rho_s U_0} \simeq 1.10^{-4}\,\mathrm{m}\,.$$

2. Notons $V = 4\pi R^3/3$ le volume de la sphère. Celle-ci est soumise à son poids $\vec{P} = \rho_s V \vec{g}$ et à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g}$. Dès qu'elle est en mouvement elle est aussi soumise à une force de traînée, qui est prise, pour $Re < 1$, égale à la force de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$. La sphère va sédimenter (c'est-à-dire couler lentement) si sa densité est supérieure à la densité du fluide ou au contraire remonter si sa densité est inférieure à 1. Après une phase initiale d'accélération elle atteint, du fait des frottements fluides, sa vitesse limite de chute.
3. Le principe fondamental s'écrit :

$$\rho_s V \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \rho_s V\vec{g} - \rho_f V\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} = (\rho_s - \rho_f)V\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} = \vec{0} \quad \text{à l'équilibre.}$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{0}$ d'où

$$\Delta\rho V\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}_{\mathrm{lim}} = \vec{0} \quad \text{avec } \Delta\rho = \rho_s - \rho_f.$$

Cela permet de tirer la vitesse limite

$$\vec{v}_{\mathrm{lim}} = \frac{\Delta\rho V}{6\pi\eta R}\vec{g} = \frac{2}{9}\Delta\rho\eta R^2\vec{g}\,,$$

qui est proportionnelle au carré du rayon : les grosses particules sédimentent plus vite. Ce résultat reste vrai même si les particules ne sont pas parfaitement sphériques.

Remarque

On peut faire deux remarques importantes :

- Les toutes petites particules ($\approx 1\,\mu$m) dites PARTICULES COLLOÏDALES OU PARTICULES BROWNIENNES ne sédimentent pratiquement pas à cause de l'agitation thermique (la vitesse aléatoire moyenne devient supérieure à la vitesse de sédimentation).
- Si maintenant de nombreuses particules sédimentent ensemble, le calcul de la vitesse de sédimentation se complique nettement (il n'est d'ailleurs pas résolu à ce jour). En effet il existe des interactions collectives (à N corps) car le champ de vitesse autour d'une particule décroît lentement (en $1/r$). De plus des effets supplémentaires apparaissent à cause de la taille finie du récipient (effet de paroi). La sédimentation d'un grand nombre de particules crée en effet un contre-écoulement du fluide vers le haut qui ralentit leur chute (une jolie démonstration en est l'effet Boycott observé lorsque l'on incline le récipient). La vitesse de sédimentation est alors une fonction de la concentration en particules : À faible Reynolds, Albert Einstein (1905) a donné le premier terme correctif à la vitesse limite de chute dépendant de la concentration c en particules : $V_{\mathrm{lim}} \approx V_{\mathrm{Stokes}} \times (1 - 6,55c)$. Au-delà on utilise la loi empirique de Richardson-Zaki, $V_{\mathrm{lim}} = V_{\mathrm{Stokes}} \times \left(1 - c/c_{\mathrm{max}}\right)^n$ où $n \approx 5$, mais dépend du nombre de Reynolds et c_{max} est la compacité maximum, de l'ordre de 54 % pour un empilement aléatoire lâche de sphères dures identiques.

Correction des exercices du chapitre 6

Correction n°25 : Milieu poreux en couche

1. On appelle q_1 le débit qui traverse une couche 1 et q_2 le débit qui traverse une couche 2. En appliquant la loi de Darcy, on a :

$$q_1 = \frac{\Delta P}{L}\frac{1}{\eta}k_1(Lh_1) \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{\Delta P}{L}\frac{1}{\eta}k_2(Lh_2)\,.$$

Le nombre de couches vaut approximativement $L/(h_1 + h_2)$ (en supposant que ce nombre est entier ou qu'il y a suffisamment de couches pour que ce nombre soit proche, en valeur relative, d'un entier). Le débit total Q vérifie :

$$Q = q_1\frac{L}{h_1+h_2} + q_2\frac{L}{h_1+h_2} = \frac{\Delta P}{L\eta}\frac{L}{h_1+h_2}(k_1Lh_1 + k_2Lh_2) = \frac{S\Delta P}{\eta L}\underbrace{\frac{k_1h_1 + k_2h_2}{h_1+h_2}}_{k_{\parallel}}\,,$$

ce qui donne pour la perméabilité effective la valeur de l'énoncé.
2. On note ΔP_1 la chute de pression dans une couche 1, et ΔP_2 la chute de pression dans une couche 2. En appliquant la loi de Darcy dans la direction orthogonal eaux couches, on a :

$$\frac{\Delta P_1}{h_1} = Q\eta\frac{1}{L^2k_1} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta P_2}{h_2} = Q\eta\frac{1}{L^2k_2}\,.$$

La chute de pression totale ΔP vérifie :

$$\Delta P = \Delta P_1\frac{L}{h_1+h_2} + \Delta P_2\frac{L}{h_1+h_2} = \frac{L}{h_1+h_2}\frac{Q\eta}{L^2}\left(\frac{h_1}{k_1}+\frac{h_2}{k_2}\right) = \frac{Q\eta L}{L^2}\underbrace{\frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{h_1k_1+h_2k_2}{k_1k_2}\right)}_{1/k_{\perp}} \tag{9.36}$$

ce qui donne pour la perméabilité effective la valeur de l'énoncé.
3. Ces résultats sont analogues aux associations en parallèle et en série de résistances en électrocinétique.

Correction des exercices du chapitre 7

Correction n°26 : Vidange de Toricelli

1. A priori la vidange est de plus en plus lente (la pression qui appuie sur le fluide est du plus en plus faible) de sorte que l'écoulement n'est pas stationnaire. Pour autant, on peut évaluer

$$\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\| \simeq \frac{v_0}{\tau} \quad \text{et} \quad \left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\| \simeq \frac{v_0^2}{h_0} .$$

On peut de plus lier h_0 et τ en notant la conservation du débit entre les deux section : $D = v_A S = v_B s$ et $v_A = -\,\mathrm{d}h\big/\mathrm{d}t$ donc

$$\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{s}{S}v_B \quad \text{et en ordre de grandeur} \quad \frac{h_0}{\tau} \simeq \frac{s}{S}v_0 .$$

Finalement,

$$\frac{\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|}{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\|} \approx \frac{h_0}{\tau v_0} = \frac{s}{S} \ll 1 .$$

L'écoulement peut donc être considéré quasi-stationnaire ou quasi-permanent.

2. On peut alors applique le théorème de Bernoulli. Dans notre cas l'écoulement est probablement tourbillonnaire de sorte que par précaution on emploie le théorème le long d'une ligne de courant entre A et B. On peut alors écrire :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + gh = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} ,$$

or $v_A \ll v_B$ de sorte que cette expression se simplifie en $gh = \rho\ v_B^2\big/2$ et

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}} .$$

C'est la FORMULE DE TORICELLI

Correction n°27 : Tube de Pitot

L'écoulement est parfait, permanent et incompressible. On peut appliquer le théorème de Bernoulli le long des lignes de courant.

1. Sur la ligne $O \longrightarrow A$ on peut affirmer que la vitesse en O est U et celle en A est nulle (c'est par définition un POINT D'ARRÊT). En notant P_0 la pression dans le fluide avant que l'écoulement ne soit perturbé on a donc

$$\rho\frac{U^2}{2} + P_0 = 0 + P_A .$$

2. Après le passage du tube l'écoulement est de nouveau parallèle et en supposant l'extension du tube négligeable par rapport à l'espace libre, la vitesse est de nouveau U. On a donc, en appliquant le théorème sur la ligne $O' \longrightarrow B'$,

$$\rho\frac{U^2}{2} + P_0 = \rho\frac{U^2}{2} + P_{B'} \quad \text{soit} \quad P_0 = P_{B'}\,.$$

3. B et B' étant très proche, et les lignes de courant parallèle à ce niveau, on peut affirmer que $P_{B'} = P_B$ en négligeant éventuellement l'effet de la pesanteur.
4. Finalement, on peut tout combiner pour affirmer que

$$U = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}\,. \tag{9.37}$$

5. En prenant $\rho_{\text{air}} = 1{,}3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, il vient $U = 18\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Correction n°28 : Cavitation

L'augmentation importante de la vitesse proche de l'hélice entraîne une diminution tout aussi importante de la pression. Deux phénomènes interviennent alors, généralement dans cet ordre :

- En diminuant la pression totale, on diminue aussi la quantité de gaz qu'il est possible de dissoudre dans le fluide. Les gaz présents initialement sortent du fluide et se vaporisent. Dans un premier temps ce sont donc ces gaz que contiennent les bulles.
- Lorsque la pression devient vraiment très faible, elle peut atteindre la pression de vapeur saturante du fluide qui se vaporise. Les bulles contiennent alors de la vapeur d'eau.

Ces effets sont très nocifs pour les coques et hélices car ils s'accompagnent généralement d'effets mécaniques (type onde de choc) qui endommagent lourdement les matériaux et accélèrent leur usure.

Correction n°29 : Effet Venturi

1. Vu les hypothèses, le théorème de Bernoulli pour les écoulements parfait, stationnaires, irrotationnels donne :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = K\,,$$

avec K constante dans tout l'écoulement. On a aussi $v_A = v_B = v_C = 0$ car il n'y a pas de vitesse normale (verticale) à ces endroits, à cause de la condition aux limites d'interface stationnaire. Il n'y a pas non plus de vitesse tangentielle (horizontale) car si c'était le cas le fluide devrait monter dans le tube et redescendre dans une autre portion du tube. Il y a alors un écoulement de cisaillement dans le tube, écoulement qui n'est pas irrotationnel. On a donc, en négligeant la tension de surface et en appelant p_0 la pression de l'air,

$$p_A = p_B = p_C = p_0$$

Vu ces équations, $z_A = z_B = z_C$, ce qui n'est pas conforme à l'expérience. Cela montre qu'une utilisation abusive du modèle du fluide parfait donne lieu à des résultats aberrants.
2. L'écoulement est parfait dans la partie convergente loin des parois, il y a une couche limite au niveau des parois, et l'écoulement est probablement turbulent dans la partie divergente (voir figure).
3. La différence entre z_A et z_B peut s'expliquer par l'effet Bernoulli : la vitesse est plus grande en B (incompressibilité), la pression est donc plus faible. La différence entre z_A et z_C s'explique par la dissipation dans les couches limites et la partie turbulente.
4. Commençons par écrire la conservation du débit entre A et B :

$$v_A S_A = v_B S_B$$

On écrit le théorème de Bernoulli dans la partie où le modèle de l'écoulement parfait est valable, sur la ligne de courant entre A' et B' (projetés orthogonaux de A et B sur l'axe du dispositif) :

$$p_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2 = p_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2$$

En utilisant l'hydrostatique dans la direction transverse à l'écoulement, et le fait que la pression en A et B vaut p_0 (pression de l'air) :

$$\begin{aligned} p'_A &= p_0 + \rho g z_A \\ p'_B &= p_0 + \rho g z_B \,, \end{aligned}$$

d'où on déduit : $g(z_A - z_B) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$. Finalement, en utilisant aussi la conservation du débit, le débit Q vaut :

$$Q = S_A v_A = S_A S_B \sqrt{\frac{2g(z_A - z_B)}{S_A^2 - S_B^2}}$$

La mesure de $P_A - P_B$ et la connaissance du fluide et des propriétés géométriques du tube permettent de mesurer le débit de l'écoulement.
5. L'effet Venturi est utilisé dans les pompes à eau notamment, de même que certains pistolet à peinture.