Correction des exercices du chapitre 8

Correction n°30 : Équation de propagation de l'onde de vitesse

Il s'agit de refaire exactement les mêmes manipulations pour éliminer cette fois p.

Correction n°31 : Vitesse du son dans un gaz parfait

Pour un gaz parfait, la compressibilité isentropique vaut $\chi_S = 1/\gamma P$ où γ est le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constant. Cette relation est valide si γ est constant.
En effet, la loi de Laplace pour le transformations adiabatiques du gaz parfait donne $p/\rho^\gamma = \text{cste}$ ce qui donne, par différentiation logarithmique,

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} = \rho_0\chi_S\,.$$

On a alors

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}\,,$$

où M est la masse molaire du fluide et R la constante des gaz parfaits. La vitesse du son dans les gaz augmente avec la température. Elle est du même ordre de grandeur que la vitesse d'agitation thermique u :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_BT \iff u = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}\,.$$

Dans le cas de l'air sec (diatomique) à 20 °C, $\gamma = 7/5 \approx 1,4$. On a :

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \times 293,15}{28,96 \times 10^{-3}}} = 343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{9.38}$$

en très bon accord avec la valeur expérimentale $c = 343{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à 1000 Hz.

Correction n°32 : Onde sonore à l'interface eau-air

À une interface eau-air,

$$T = \frac{4 \times 430}{(430 + 1,5 \times 10^6)^2} \simeq 10^{-3} \tag{9.39}$$

Le coefficient de transmission des ondes acoustiques entre l'eau et l'air est donc très petit devant 1. Cela explique notamment qu'on ne puisse pas entendre quelqu'un sous l'eau : le son doit en effet franchir deux fois une telle interface, des cordes vocales à l'eau puis de l'eau à l'air de l'oreille.

Correction n°33 : Do fondamental d'une flûte à bec

1. Il faut que

$$L = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{c}{2\nu_0} = \frac{1}{2\nu_0}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 65\,\text{cm}\,.$$

2. La fréquence est inversement proportionnelle à $\sqrt{T}$ d'où

$$\nu_{10\,°\text{C}} = \nu_{20\,°\text{C}}\sqrt{\frac{283}{293}} = 259\,\text{Hz}\,.$$

3. Il faut

$$L' = \frac{c}{2\nu'} = 58\,\text{cm}\,.$$

Correction n°34 : Fréquences propres d'une sphère rigide

1. Le milieu étant limité, une onde sphérique divergente émise en $r = 0$ sera réfléchie par les parois rigides et transformée en une onde sphérique convergente. L'onde totale est donc la superposition de ces deux ondes avec éventuellement des amplitudes différentes. Le champ de vitesse se calcule comme toujours à partir de l'équation d'Euler linéarisée. On trouve :

$$\underline{v} = \frac{1}{i\rho_0\omega r^2}\left(\underline{A}(1+ikr)\exp(i(\omega t - kr)) + \underline{B}(1-ikr)\exp(i(\omega t + kr))\right).$$

2. Le débit volumique $D_v = 4\pi r^2 v(r,t)$ doit tendre vers 0 lorsque le rayon de la sphère tend vers 0. On en déduit $\underline{A} = -\underline{B}$. Les expressions de la suppression et de la vitesse se simplifient en :

$$\underline{p} = -\frac{2i\underline{A}}{r}\sin(kr)\exp(i\omega t) \quad \text{et} \quad v = -\frac{2\underline{A}}{i\omega\rho_0 r^2}(-2\sin(kr) + 2kr\cos(kr))\exp(i\omega t)\,.$$

Ce sont des ondes stationnaires, ce qui est normal puisque le système est spatialement limité. D'autre part, à la surface de la cavité sphérique, la composante normale de la vitesse du fluide est nulle donc $v(R,t) = 0$ ce qui impose la quantification des modes propres :

$$\tan(kR) = kR \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}\,.$$

Cette équation se résout graphiquement en cherchant les intersections de la droite $y = x$ avec $y = \tan(x)$. On alors $x_n = k_n R$. Cela donne une infinité de k_n, un dans chaque intervalle $[n\frac{\pi}{2}, (n+1)\frac{\pi}{2}]$.
3. La résolution numérique de $\tan(x) = x$ donne comme première solution $x = 4.5$ qui correspond à une fréquence propre

$$f_1 = \frac{cx}{2\pi R} = 4{,}9\,\text{Hz}\,.$$

Remarquons d'ailleurs que pour émettre des fréquence basse il faut augmenter le rayon. Cela explique que les baffles de concert capables de sortir des basses puissantes sont toujours très grosses !

Correction n°35 : Onde acoustique dans un solide

1. Le théorème du centre d'inertie (PFD) appliqué à l'atome de rang (n) donne, en projection :

$$m\ddot{x}_n = -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n) = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})\,.$$

2. On peut écrire :

$$u_{n+1}(t) = u(x_{\text{eq},n+1}, t) = u(x_{\text{eq},n} + a, t) = u(x_{\text{eq},n}, t) + \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 ,$$
$$\text{et} \quad u_{n-1}(t) = u(x_{\text{eq},n-1}, t) = u(x_{\text{eq},n} - a, t) = u(x_{\text{eq},n}, t) - \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 .$$

L'équation du mouvement devient alors

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}.$$

C'est l'équation d'onde de d'Alembert, déjà observée à de multiples reprises, en particulier en électromagnétisme et juste dans ce chapitre pour la propagation des ondes acoustiques dans les fluides. On sait qu'elle est associée à un phénomène ondulatoire de célérité c, laquelle vitesse ne doit pas être confondue avec la vitesse de déplacement longitudinal des atomes $\partial u / \partial t$. Les ondes sont ici longitudinales car le mouvement des atomes se fait dans la direction de propagation. Voir ici `https://www.youtube.com/watch?v=f66syH8B9D8&ab_channel=PelletierPhysics` une vidéo d'onde longitudinale.