

# Chapitre 8

## Ondes acoustiques

Les ondes sonores nous sont familières car nous les percevons et nous les utilisons pour communiquer. Les ondes acoustiques ont aussi des applications plus techniques, par exemple en médecine : échographie, mesure de la vitesse du sang par effet Doppler, etc. Dans l'optique du concours, l'étude des ondes acoustiques va vous permettre de réviser les notions associées à la propagation des ondes.

En effet, les ondes acoustiques sont des ondes longitudinales qui se propagent dans les milieux matériels, mais pas dans le vide. Dans les fluides, il s'agit d'*ondes de pression*. Les deux grandeurs couplées nécessaires à la propagation des ondes sonores sont l'inertie du fluide et sa compressibilité qui joue le rôle de force de rappel.

### Remarque

La nécessité d'un milieu de propagation a été mise en évidence par Otto von Guericke en 1672. En plaçant une alarme dans une cloche à vide. Le son s'est éteint progressivement au fur et à mesure que le vide se faisait avant de devenir complètement imperceptible.

Dans les solides il existe en plus des ondes de compression des ondes de cisaillement ; ces différentes ondes ont aussi des vitesses différentes.

## 8.1 Équation de propagation

### 8.1.1 Approximation acoustique

L'expérience montre que la propagation des ondes sonores est généralement caractérisée par un faible amortissement au sein du fluide où elles se propagent. Un son suffisamment fort peut être entendu de très loin et son amortissement est plus lié à la géométrie de l'onde (généralement sphérique) qu'à l'amortissement ou l'absorption par le milieu. On négligera donc les phénomènes dissipatifs : conduction thermique et viscosité, ce qui revient à postuler le caractère *isentropique* de la propagation des ondes sonores et à supposer le fluide parfait.

Les seules forces prises en compte sont les forces de pression. À ce stade la pesanteur est négligée. Soient  $\rho_0$ ,  $p_0$  et  $T_0$  les masse volumique, pression et température du fluide au repos supposées uniformes, on note :

- $\rho = \rho_t - \rho_0$  la variation de masse volumique du fluide en un point donné à l'instant  $t$ ,
- $p = p_t - p_0$  la variation de pression dans le fluide en un point donné à l'instant  $t$ , dite SURPRESSION ACOUSTIQUE,
- $\vec{v}$  le vecteur vitesse d'une particule fluide, qui est rigoureusement nulle au repos.

L'approximation acoustique consiste à considérer que les grandeurs  $\rho$ ,  $p$  et  $\vec{v}$  sont des infiniment petits du même ordre (ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles).

**Remarque**

Les surpressions susceptibles d'être détectées par une oreille varient typiquement de 100 Pa (son douloureux) à  $1.10^{-5}$  Pa (seuil d'audition), couvrant ainsi 7 décades.

Notamment, tous les calculs seront effectués à l'ordre 1 en ces infiniment petits.

**8.1.2 Équations**

On dispose alors de trois équations :

- l'équation du mouvement du fluide, qui est dans ce cas d'écoulement parfait l'équation d'Euler <sup>a</sup> :

$$\rho_t \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_t (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_t),$$

- l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \text{div} \rho_t \vec{v} = 0,$$

- l'équation d'état, qui lie pression et masse volumique. Dans un cas particulier comme le gaz parfait on a, pour une transformation isentropique <sup>b</sup>, la relation exacte et explicite  $p_t V^\gamma = \text{cste}$  soit encore  $p_t (1/\rho_t)^\gamma = \text{cste}$ . Dans le cas général on se contente d'une relation implicite faisant intervenir le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p_t} \right)_s = \frac{1}{\rho_t} \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial p_t} \right)_s \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho}{p}.$$

soit

$$\rho \approx \rho_0 \chi_s p.$$

a. Si des forces volumiques sont à l'œuvre, il faut ajouter un terme source,  $\vec{f}(\vec{r}, t)$ , homogène à une force par unité de volume. C'est ce type de force qui est créé par un objet oscillant, tel qu'une membrane de haut-parleur sans baffle.

b. On dit généralement « adiabatique réversible », mais ça n'est qu'un cas particulier.

**8.1.3 Linéarisation des équations**

Dans l'équation d'Euler, avec  $\rho_t = \rho + \rho_0$  et  $p_t = p + p_0$ , il vient

$$(\rho + \rho_0) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho + \rho_0) (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p + p_0)$$

$$\text{à l'ordre 0 : } 0 = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_0)$$

$$\text{et à l'ordre 1 : } \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p).$$

De même, en injectant  $\rho_t = \rho + \rho_0$  dans la conservation de la masse,

$$\frac{\partial \rho + \rho_0}{\partial t} + \text{div}(\rho + \rho_0) \vec{v} = 0$$

$$\text{à l'ordre 0 : } \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

$$\text{et à l'ordre 1 : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho_0 \vec{v} = 0.$$

L'équation d'état est par construction déjà d'ordre 1 (on s'est limité au premier terme du développement limité de  $\rho(p)$ ).

### 8.1.4 Équation de d'Alembert

En combinant ces trois équations pour éliminer  $\rho$  on aboutit à deux équations couplées sur  $\vec{v}$  et  $p$  :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \text{div} \vec{v}. \quad (8.1)$$

Pour obtenir l'équation de propagation sur  $p$  on peut exprimer  $\partial \text{div} \vec{v} / \partial t$  grâce à la première équation :

$$\text{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \text{div} \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(p)) = -\frac{1}{\rho_0} \Delta p. \quad (8.2)$$

On obtient alors

$$\Delta p - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert de propagation des ondes

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}.$$

#### Exercice n°30 : Équation de propagation de l'onde de vitesse

Vérifier que lors de la propagation d'une onde sonore la vitesse  $\vec{v}$  vérifie, comme la pression, l'équation de d'Alembert. Exprimer la célérité associée.

L'onde de pression et l'onde de vitesse sont ainsi deux facettes d'une même *onde sonore* et sont caractérisées par la même célérité. Elles se propagent ensemble et leur célérité  $c$  vérifie :

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}, \quad (8.3)$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique du fluide au repos, et  $\chi_s$  la compressibilité isentropique du fluide. Les ondes acoustiques sont donc *non-dispersives* !

#### Remarque

Et heureusement ! Si la propagation du son était dispersive on recevrait la voix de manière complètement déformée et probablement incompréhensible.

La célérité des ondes acoustiques dépend des caractéristiques mécaniques du milieu. Les liquides ont une masse volumique plus grande et une compressibilité plus faible que celle des gaz. La célérité des ondes acoustiques dans les liquides est supérieure mais du même ordre de grandeur que celle dans les gaz. Par exemple la célérité des ondes acoustiques dans l'air à 20 °C vaut environ  $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et dans l'eau environ  $1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

#### Exercice n°31 : Vitesse du son dans un gaz parfait

Estimer numériquement la célérité des ondes sonores dans un gaz parfait typique.

### 8.1.5 Conditions d'écoulement incompressible

#### À grand nombre de Reynolds

Ce début d'étude des ondes acoustiques nous permet de mettre en évidence un critère nécessaire pour considérer qu'un écoulement est incompressible. En effet, il faut notamment avoir

$$\left| \frac{\rho}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad (8.4)$$

Or, au premier ordre :

$$\frac{\rho}{\rho_0} \sim p\chi_s$$

En regardant l'équation d'Euler en ordre de grandeur, on voit que  $p \sim \rho_0 U^2$ , où  $\rho_0$  est la masse volumique et  $U$  une vitesse typique. La condition d'incompressibilité se réécrit ainsi :

$$p\chi_s \ll 1 \iff \rho_0 \chi_s U^2 \ll 1 \iff \frac{U^2}{c^2} \ll 1 \iff \text{Ma}^2 \ll 1,$$

où  $\text{Ma} = U/c$  est le nombre de Mach associé à l'écoulement. Il faut donc nécessairement que l'écoulement ait lieu à une vitesse largement inférieure à la vitesse du son.

#### À faible nombre de Reynolds

L'ordre de grandeur des variations de pression pour les écoulements ouverts à petits nombres de Reynolds est  $p \sim \eta U/L$ , où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide, et  $L$  la dimension typique de l'écoulement. La condition (8.4) se réécrit :

$$p\chi_s = \frac{\eta U}{L} \chi_s = \frac{\eta}{\rho U L} U^2 \underbrace{\rho \chi_s}_{1/c^2} = \frac{1}{\text{Re}} \text{Ma}^2 \ll 1 \quad \text{i.e.} \quad \text{Ma} \ll \sqrt{\text{Re}}$$

#### Remarque

Ces conditions sont des conditions nécessaires, mais pas suffisantes.

- Un écoulement confiné (dans une seringue fermée) ne peut pas être considéré comme incompressible même s'il est lent, car la variation de pression  $\delta p$  n'est pas donnée par les expressions précédentes.
- Si on s'intéresse aux ondes acoustiques, on ne peut pas négliger la compressibilité même si  $U \ll c$ .

## 8.2 Aspect énergétique

On repart des équations couplées (8.1). La première est multipliée par  $\vec{v}$  et la seconde par  $p$  puis on somme pour obtenir :

$$p \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(p) = -\rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \chi_s p \frac{\partial p}{\partial t}.$$

L'analyse vectorielle informe que le terme de gauche vaut  $\text{div}(p\vec{v})$  d'où, à l'ordre 1 :

$$\text{div}(p\vec{v}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\chi_s p^2}{2} \right) \quad (8.5)$$

Interprétation physique :

On doit reconnaître une équation de conservation locale de l'énergie. Les termes s'interprètent ainsi :

- $u_c = \rho_0 v^2 / 2$  est l'énergie cinétique volumique du fluide.
- $u_e = \chi_S p^2 / 2 = p^2 / (2\rho_0 c^2)$  est l'énergie potentielle volumique du fluide.
- $W = u_c + u_e = \rho_0 v^2 / 2 + \chi_S p^2 / 2$  est la DENSITÉ VOLUMIQUE D'ÉNERGIE SONORE
- $\vec{I} = p \vec{v}$  est le vecteur densité surfacique de puissance sonore. C'est l'analogie du vecteur de Poynting pour les ondes électromagnétiques dans le vide.

Finalement le bilan d'énergie sonore s'écrit

$$\operatorname{div}(\vec{I}) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 .$$

## 8.3 Solutions de l'équation d'onde

### 8.3.1 Structure de l'onde plane

On considère une onde plane :

$$p = p_A \cos(\omega t - kx) \quad \text{et} \quad v = v_A \cos(\omega t - kx) .$$

En l'injectant dans l'équation d'onde en notation complexe  $\underline{p} = p_A e^{i(\omega t - kx)}$  et  $\underline{v} = v_A e^{i(\omega t - kx)}$  il vient :

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k^2 \underline{p} + \frac{1}{c_s^2} \omega^2 \underline{p} = 0 ,$$

d'où a RELATION DE DISPERSION DES ONDES SONORES :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} .$$

### 8.3.2 Aspect fréquentiel

Les ondes acoustiques audibles par l'être humain ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz environ (voir figure 8.1). La limite haute dépend de l'âge des individus et de leur exposition au bruit. La limite basse dépend également des individus. Les fréquences inférieures à 20 Hz sont appelées INFRASONS et celles supérieures à 20 kHz sont les ULTRASONS. Il n'y a pas de différence physique entre les sons, les infrasons et les ultrasons. La différence vient de leur fréquence et est à rapporter à des propriétés physiologiques de l'humain.

### 8.3.3 Énergie transportée par l'onde plane

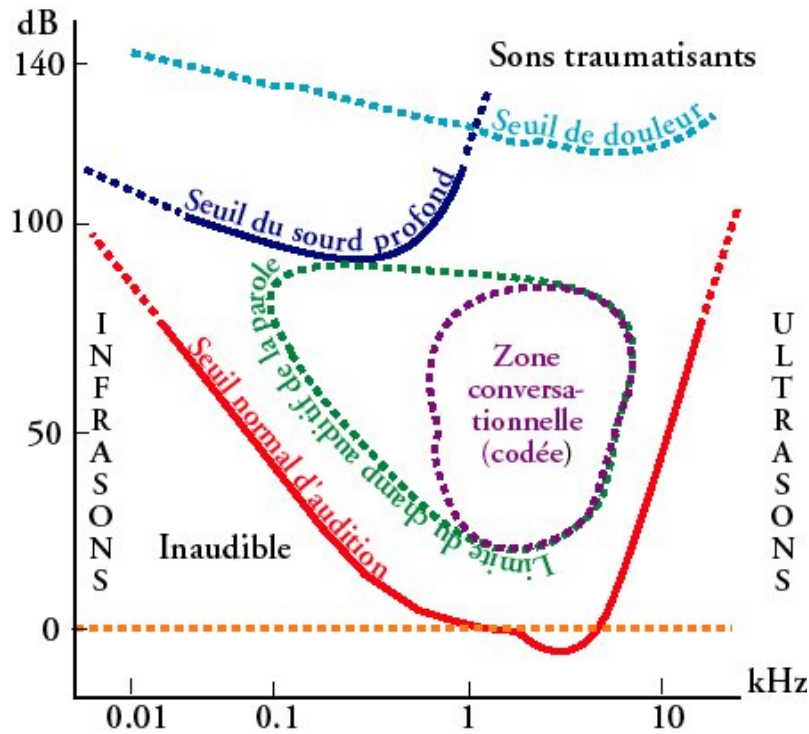
On considère une onde plane 1D. On utilise les notations complexes. On a l'équation (8.1)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v}{\partial x}$$

d'où le lien entre  $\underline{p}$  et  $\underline{v}$  :

$$\underline{p} = \rho_0 c \underline{v} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \rho_0 c$$

est l'impédance du milieu pour l'onde sonore se propageant dans le sens des  $x$  croissants.

FIGURE 8.1 – Zones de l'audition humaine dans le diagramme *intensité - fréquence*.

On note  $\langle \dots \rangle$  la moyenne en temps (sur une période). Alors :

$$\langle u_c \rangle = \left\langle \frac{\rho_0 v_1(t)^2}{2} \right\rangle = \frac{\rho_0 v_1^2}{4} \quad \text{et} \quad \langle u_e \rangle = \left\langle \frac{\chi_s p^2}{2} \right\rangle = \frac{\chi_s p_A^2}{4};$$

on démontre alors que  $\langle u_e \rangle = \langle u_c \rangle$  et ainsi  $\langle W \rangle = 2 \langle u_c \rangle = 2 \langle u_e \rangle$ . On a de plus

$$\left\langle \|\vec{I}\| \right\rangle = \left\langle p_A v_A \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle = \frac{p_A v_A}{2} = \frac{p_A}{\rho_0 c} \frac{p_A}{2} \frac{2}{\rho_0 c \chi_s} \langle u_e \rangle = cW. \quad (8.6)$$

L'intensité acoustique est alors le produit de la densité volumique d'énergie emmagasinée par l'onde par la vitesse de l'onde : toute l'énergie se propage à  $c$ . Pour une fréquence donnée, on définit l'intensité en décibel<sup>1</sup>  $I_{dB}$  par :

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_s} = 20 \log \frac{p}{p_s} \quad (8.7)$$

avec  $I_s = 1.10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  le seuil de l'audition humaine, dit SEUIL D'AUDIBILITÉ à 1 kHz<sup>2</sup>, et  $p_s$  la surpression correspondante. Le seuil de douleur est d'environ  $I_d = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , soit 120 dB.

### 8.3.4 Ondes sphériques

La plupart des ondes sonores réelles sont des ondes sphériques (au moins en première approximation). Pour les étudier on se place en coordonnées sphériques et on suppose que les fonctions d'intérêt ne dépendent ni de  $\theta$ , ni de  $\varphi$  :  $p(r)$ ,  $\vec{v}(r)$  et  $\rho(r)$ . En utilisant l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques, pour un champ qui ne dépend que de  $r$ , l'équation de d'Alembert pour la pression devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r p}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 r p}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r p}{\partial t^2}.$$

1. Vous prendrez garde à bien représenter les décibel par un  $d$  minuscule et un  $B$  majuscule...

2. Il s'agit bien sûr d'un seuil conventionnel, il y a des différences entre les individus.

La fonction  $rp$  vérifie donc une équation d'onde unidimensionnelle.

$$rp = Ae^{i(\omega t - kr)} + Be^{i(\omega t + kr)}$$

soit

$$p(r) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} + \frac{B}{r} e^{i(\omega t + kr)}$$

Si on considère l'onde émise par une source placée en  $r = 0$ , il ne reste que l'onde sphérique divergente

$$p(r) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}.$$

Dans ce cas, on peut montrer que l'intensité acoustique vérifie :

$$I \propto \frac{1}{r^2} \quad (8.8)$$

L'intégrale de l'intensité sur une sphère de rayon  $r$  (surface  $4\pi r^2$ ) est ainsi constante. Le facteur  $1/r^2$  vient de la conservation de l'énergie et de la propagation de l'énergie acoustique.

#### Remarque

Si on prend en compte les phénomènes dissipatifs, l'onde acoustique est atténuée et l'intensité acoustique décroît plus rapidement lorsque  $r$  augmente.

## 8.4 Dioptré acoustique

### 8.4.1 Définition

Un dioptré acoustique (voir figure 8.2) est l'interface entre deux milieux de caractéristiques (masse volumique, compressibilité) différentes, par exemple une interface eau-air. C'est l'exact analogue du dioptré en optique.

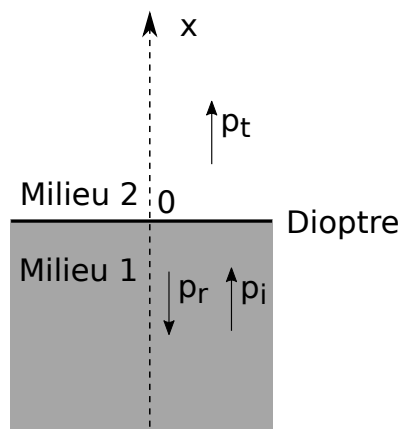


FIGURE 8.2 – Schéma d'un dioptré acoustique. Les flèches indiquent les vecteurs d'ondes correspondant aux ondes incidente (indice  $i$ ), transmise (indice  $t$ ) et réfléchie (indice  $r$ ).

### 8.4.2 Impédance acoustique

On considère une onde plane qui se propage dans un milieu infini, et on utilise les notations complexes. On définit l'impédance acoustique  $\underline{Z}$  par :

$$\underline{Z} = \frac{p_1}{v_1} \quad (8.9)$$

Si l'onde est une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants ( $\underline{p}_1 \exp(i(kx - \omega t))$ ), alors  $\underline{Z} = \rho_0 c$ . S'il s'agit d'une onde dans le sens des  $x$  décroissants ( $\underline{p}_1 \exp(i(kx + \omega t))$ ) alors  $\underline{Z} = -\rho_0 c$

Valeur pour l'air  $Z_a = 430 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-2}$ , pour l'eau  $Z_e = 1,5 \times 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-2}$ . Attention à l'unité de l'impédance acoustique, elle est différente de celle des impédances en électricité.

### 8.4.3 Coefficients de réflexion et de transmission

On considère une onde acoustique en incidence normale sur un dioptré (voir figure 8.2). On admet que cette onde incidente provoque l'apparition d'une onde réfléchie et d'une onde transmise de même fréquence.

En utilisant le fait que la surpression dans le milieu 1 est la somme des surpressions dues aux ondes incidentes et réfléchies (approximation linéaire faite dans tout ce cours), et que la pression est continue à une interface plane entre deux fluides, on a en  $x = 0$  :

$$p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \quad (8.10)$$

En posant  $r$  le coefficient de réflexion en pression, et  $t$  celui en transmission, cette équation donne :

$$p_i(0, t) + r p_i(0, t) = t p_i(0, t) \quad (8.11)$$

soit en simplifiant par  $p_i(0, t)$  (non identiquement nul s'il y a une onde) :

$$1 + r = t \quad (8.12)$$

La vitesse normale des particules est la même de chaque côté :

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \quad (8.13)$$

D'où

$$\frac{1}{Z_1} - \frac{r}{Z_1} = \frac{t}{Z_2} \quad (8.14)$$

(où on omet les barres sous  $Z$  pour alléger l'écriture). Il vient :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (8.15)$$

$$t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (8.16)$$

$$(8.17)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont définies à partir de l'intensité de l'onde sonore :

$$R = \left| \frac{p_r v_r}{p_i v_i} \right| = \left| \frac{r^2 Z_1}{Z_1} \right| = r^2 = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (8.18)$$

$$T = \left| \frac{p_t v_t}{p_i v_i} \right| = \left| \frac{t^2 Z_2}{Z_1} \right| = \frac{4Z_1}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (8.19)$$

On a  $R + T = 1$ , ce qui traduit la conservation de l'énergie à l'interface.

Ce comportement à l'interface entre deux milieux justifie qu'on utilise un gel entre l'émetteur et la peau lors des échographies Doppler. Il s'agit d'une « adaptation d'impédance ». La différence d'impédance acoustique entre les tissus provoque une réflexion de l'onde sonore, qui est mesurée en échographie.



**Remarque**

si  $Z_2 = 2Z_1$  par exemple, on aura  $t > 1$ , ce qui n'est pas en désaccord avec les lois de la physique. Par contre on devra toujours vérifier que  $R \leq 1$  et  $T \leq 1$  : l'énergie transmise et l'énergie réfléchi sont nécessairement, l'une et l'autre, inférieure ou égale à l'énergie incidente.

**Exercice n°32 : Onde sonore à l'interface eau-air**

Calculer le coefficient de transmission en énergie d'une onde sonore passant de l'eau à l'air et commenter la valeur obtenue.

## 8.5 Effet Doppler

### 8.5.1 Aspect qualitatif

L'effet Doppler correspond au changement de fréquence de l'onde sonore perçue par un observateur lorsque la source et l'observateur sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. C'est un effet donc tout le monde a fait l'expérience en entendant une ambulance se rapprocher puis s'éloigner. La tonalité (donc la fréquence) de son signal sonore change progressivement. Le nom de cet effet vient du physicien autrichien Christian Andreas Doppler (1803-1853).

L'effet Doppler existe aussi pour les autres ondes, notamment les ondes électromagnétiques (radar). Cependant, les expressions des fréquences en fonction des vitesses de la source et de l'observateur dépendent du type d'onde.

### 8.5.2 Cas 1D

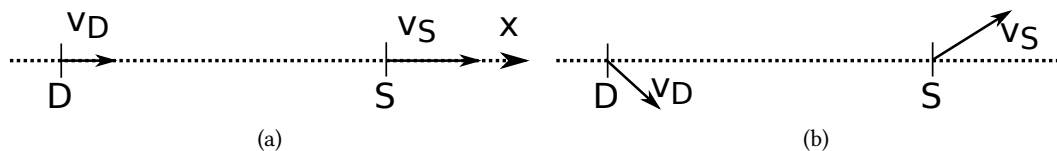


FIGURE 8.3 – (a) : schéma pour calculer l'effet Doppler à 1D. D est le détecteur, et S la source. (b) : schéma pour calculer l'effet Doppler à 3D.

On considère le schéma de la figure 8.3a. On se place dans le référentiel où le fluide est au repos : les vitesses  $v_D$  et  $v_S$  du détecteur et de la source sont les vitesses dans ce référentiel. On considère que la source envoie des impulsions toutes les  $T_S$ <sup>3</sup>. On appelle  $t'$  l'instant où le détecteur reçoit le signal émit par la source à l'instant  $t$  :

$$\underbrace{t'}_{\text{reception}} = \underbrace{t}_{\text{envoi}} + \underbrace{\frac{x_S(t) - x_D(t')}{c}}_{\text{propagation}} \quad (8.20)$$

où  $c$  est la vitesse de l'onde sonore. L'impulsion suivante est reçue en  $t' + T_D$ , où  $T_D$  est la période mesurée par le détecteur :

$$t' + T_D = (t + T_S) + \frac{x_S(t + T_S) - x_D(t' + T_D)}{c}$$

3. Le résultat est le même si on considère des ondes sinusoïdales, mais le calcul est plus compliqué.

Si les périodes  $T_S$  et  $T_D$  sont suffisamment petites<sup>4</sup>, on peut faire le développement limité :

$$t' + T_D = (t + T_S) + \frac{x_S(t) + T_S v_S(t) - (x_D(t') + T_D v_D(t'))}{c}$$

En utilisant l'équation (8.20), il vient :

$$T_D = T_S + \frac{T_S v_S(t) - T_D v_D(t')}{c} \quad \text{d'où} \quad \left(1 + \frac{v_D(t')}{c}\right) T_D = \left(1 + \frac{v_S(t)}{c}\right) T_S$$

d'où pour les fréquences :

$$f_D = f_S \frac{1 + \frac{v_D(t')}{c}}{1 + \frac{v_S(t)}{c}}.$$

### 8.5.3 Cas 3D

Les hypothèses sont les mêmes que dans le calcul 1D. On appelle  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé de  $D$  à  $t'$  vers  $S$  à  $t$ . On a :

$$t' = t + \frac{\|\vec{r}_S(t) - \vec{r}_D(t')\|}{c}$$

où  $\vec{r}_S$  est la position de la source et  $\vec{r}_D$  celle du détecteur. Pour l'impulsion suivante :

$$t' + T_D = t + T_S + \frac{\|\vec{r}_S(t + T_S) - \vec{r}_D(t' + T_D)\|}{c}$$

On utilise le développement limité :

$$d(\|\vec{r}_S(t + T_S) - \vec{r}_D(t' + T_D)\|) = \vec{u} \cdot \vec{v}_S(t) dt - \vec{u} \cdot \vec{v}_D(t') dt,$$

et on obtient finalement :

$$f_D = f_S \frac{1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_D(t')}{c}}{1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_S(t)}{c}}$$

On voit que le décalage dépend de l'orientation de la vitesse par rapport à la ligne qui relie  $S$  et  $D$ . Cette orientation est également importante pour les ondes électromagnétique : l'angle entre le radar et la voiture doit être connu avec précision.

### 8.5.4 Échographie Doppler

Il s'agit d'une mesure de la vitesse d'un écoulement, par exemple la vitesse du sang dans une artère. Le principe est de mesurer le décalage en fréquence de l'onde sonore rétrodiffusée. Comme ce décalage en fréquence est faible, on le mesure en général par détection synchrone.

## 8.6 Ondes acoustiques stationnaires

Jusqu'ici nous nous sommes intéressés sans le dire à la *propagation libre* des ondes acoustiques. Dans la plupart des cas d'intérêt cependant leur propagation est contrainte par des conditions limites. C'est le cas notamment dans tous les instruments de musique.

4. Quantitativement il faut que le terme d'ordre supérieur, lié à l'accélération, soit petit, c'est-à-dire que  $|T_S dx_s/dt| \ll |v_s|$  et de même pour le détecteur.

### 8.6.1 Conditions limites

La condition limite imposée à l'onde acoustique dépend de l'interface considérée.

À une interface libre, la pression totale doit être égale à tout instant à la pression atmosphérique. La suppression  $p$  est donc nulle.

À une interface solide, au contraire, c'est la vitesse des particules qui doit être nulle (non pénétration). On a  $\vec{v} = \vec{0}$ .

À l'interface entre deux milieux dans lesquels la propagation est possible est plus compliquée. Il faut quantifier quelle part de l'intensité est réfléchiée, et quelle part est absorbée dans le milieu. Cela revient à exprimer des coefficients de réflexion ( $R$ ) et de transmission ( $T$ ) en intensité, en fonction des caractéristiques du milieu, c'est-à-dire de l'impédance. On a déjà fait le calcul et trouvé :

$$R = \frac{I_{\text{réfléchiée}}}{I_{\text{incident}}} = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{I_{\text{transmis}}}{I_{\text{incident}}} = 1 - R = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}. \quad (8.21)$$

### 8.6.2 Ondes stationnaires

Le milieu étant contraint, on cherche des solutions sous la forme d'onde stationnaire. De manière très générale on écrit

$$p(x, t) = p_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi).$$

En traduisant l'origine des temps on peut fixer  $\psi = 0$  et la relation de dispersion des ondes acoustiques  $\omega = kc$  est toujours valable.

La pression étant connue, la vitesse s'en déduit via l'équation d'Euler linéarisée

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} p_0 \sin(\omega t) \sin(kx + \varphi).$$

#### Attention !

La proportionnalité entre  $v$  et  $p$  via l'impédance acoustique ne s'applique qu'aux ondes progressives ce qui n'est par définition par le cas ici.

### 8.6.3 Cas d'un tuyau simple

#### Solution dans le tuyau. Harmoniques

Considérons en premier lieu un tuyau simple ouvert aux deux extrémités.

On a alors  $p(0, t) = 0$  et  $p(L, t) = 0$  soit

$$\cos(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(kL + \varphi) = 0.$$

La première équation impose  $\varphi = \pi/2$  et par suite la seconde donne

$$kL = n\pi \quad \text{i.e.} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

La résolution fait donc apparaître une quantification des nombres d'onde, et par extension des fréquences jouables dans le tube  $v_n = nc/2L = nv_0$ . Tous les multiples du fondamental sont donc autorisés à s'établir dans le tuyau.

On peut aussi passer ces expressions en longueur d'onde pour s'apercevoir que  $L = n \lambda_n/2$  : la longueur totale du tuyau est un multiple entier de la demie longueur d'onde. Ceci est cohérent avec le fait qu'on a imposé la présence de  $n$  nœuds aux extrémités du tube.



Schéma représentatif des champ de pression et de vitesse pour différents  $n$ , cf. Dunod p. 918.

Ce cas est ainsi complètement analogue à la corde de Melde fixée aux deux extrémités.

### Exercice n°33 : Do fondamental d'une flûte à bec

Une flûte à bec émet un do à 264 Hz lorsque tous les trous sont bouchés et que la température ambiante est de 20 °C.

1. Quelle est la longueur approximative de la flûte ?
2. Que devient la fréquence du do joué lorsque la température chute à 10 °C ?
3. À quelle distance du bec se trouve le trou à ouvrir pour jouer un ré à 294 Hz ?

### Aspects énergétiques

Dans ce cas de tuyau symétrique on a

$$p(x, t) = -p_0 \cos(\omega t) \sin(kx) \quad \text{et} \quad v(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} p_0 \sin(\omega t) \cos(kx).$$

Le vecteur de Poyntig s'écrit donc (cf. (??))

$$\vec{\Pi} = -\frac{p_0^2}{\rho_0 c} \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{u}_x,$$

et est nul en valeur moyenne. L'énergie contenue dans une onde acoustique stationnaire ne se propage pas en moyenne.

On a de plus

$$e_c = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{p_0^2}{\rho_0^2 c^2} \cos(kx)^2 \sin(\omega t)^2 \quad \text{et} \quad e_p = \frac{1}{2} \chi_0 p_0^2 \sin(kx)^2 \cos(\omega t)^2.$$

En moyenne,

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{4} \chi_0 p_0^2 \cos(kx)^2 \quad \text{et} \quad \langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \chi_0 p_0^2 \sin(kx)^2,$$

d'où  $\langle e \rangle = \frac{1}{4} \chi_0 p_0^2$  qui est constante et homogène : l'énergie passe périodique de sa forme cinétique à sa forme potentielle.

### 8.6.4 Cas d'un tuyau mixte

Si le tuyau comporte maintenant une extrémité libre en  $x = L$  et l'autre fermée en  $x = 0$  les conditions limites sont différentes. Il faudra en effet vérifier  $v(0, t) = 0$  et  $p(L, t) = 0$ . Avec les expressions induite des champs de vitesse et de pression cela impose

$$\sin(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(kL + \varphi) = 0.$$

Cette fois, la première équation impose  $\varphi = 0$  et

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{i.e.} \quad k_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les nombres d'onde autorisés, et de fait les fréquences  $\nu_n$  sont donc limités aux multiples impairs du fondamental. Avec des instruments mixtes (comme la clarinette) on ne pourra jouer que les harmoniques impaires du fondamental ce qui modifie le timbre de l'instrument.

## Exercices supplémentaires

### Exercice n°34 : Fréquences propres d'une sphère rigide

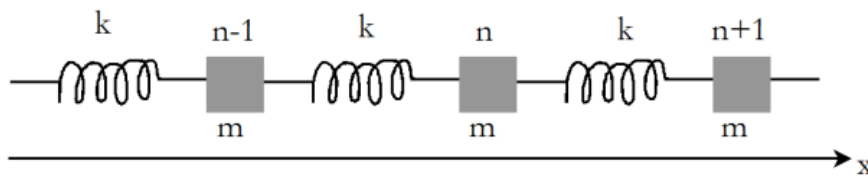
On cherche à étudier les modes propres de vibration à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon  $R$ . On écrit la surpression sous la forme

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(\omega t - kr)) + \frac{B}{r} \exp(i(\omega t + kr)).$$

1. Justifier cette expression et écrire le champ de vitesse.
2. Quelles sont les conditions aux limites ? Déterminer l'équation vérifiée par les fréquences propres.
3. Donner une valeur numérique approchée de la plus basse de ces fréquences. Effectuer l'application numérique pour  $R = 5$  cm.

### Exercice n°35 : Onde acoustique dans un solide

Afin d'étudier la propagation d'ondes sonores dans les solides, on utilise le modèle suivant :



Modèle de solide pour l'étude des ondes acoustiques.

Le solide est constitué d'une chaîne infinie d'atomes ponctuels, de masse  $m$ , reliés entre eux par des ressorts de raideur  $k$  et de longueur à vide  $a$  (correspondant à la distance inter-atome à l'équilibre). La chaîne d'atomes couplés élastiquement (rappel linéaire) par des ressorts constitue une modélisation simple pour décrire la propagation de petits mouvements vibratoires dans un solide, c'est-à-dire la propagation du son dans un solide. En effet, un solide est généralement constitué d'empilements réguliers d'atomes (ions ou molécules). Les forces rappelant un atome vers sa position d'équilibre peuvent être modélisées, à l'ordre linéaire, par un rappel élastique, dans la mesure où les amplitudes des vibrations des atomes sont faibles (on suppose ici que le solide est homogène et isotrope).

Le mouvement de l'ensemble se fait sans frottements le long de l'axe (Ox).

Les atomes se déplacent légèrement autour de leurs positions d'équilibres respectives, que l'on peut repérer sous la forme  $x_{\text{eq}} = na$ , et leur position hors équilibre est repérée par les abscisses  $x_n(t) = na + u_n(t)$ , où les déplacements  $u_n(t)$  restent faibles vis-à-vis de  $a$ .

1. Exprimer l'équation du mouvement portant sur les  $u_n$ .

La distance  $a$  inter-atome est de l'ordre de  $a \approx 1.10^{-10}$  m, distance très inférieure aux distances caractéristiques des phénomènes de propagation que l'on étudie, notamment vis-à-vis de la longueur d'onde de la vibration (de l'ordre de 25 cm à 20 kHz). Par conséquent,  $u(t)$  varie très peu sur la distance  $a$ . On va ainsi définir une fonction continue  $u$  de la manière suivante (approximation des milieux continus) :

$$u(x_{\text{eq},n}, t) = u_n(t).$$

2. Exprimer  $u_{n+1}(t)$  et  $u_{n-1}(t)$  au second ordre en  $a$ . Que devient l'équation du mouvement ? Commenter.