

## Chapitre 9

# Tension superficielle

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié l'écoulement d'un seul fluide. Toutefois, dans de nombreuses configurations expérimentales plusieurs fluides non-miscibles sont présents. Par exemple, les « ondes à la surface de l'eau » sont en fait des ondes « à l'interface entre l'eau et l'air ». De même, les gouttes de pluie se forment et tombent dans l'air. En microfluidique, on forme des gouttes d'un liquide dans un autre liquide pour confiner des réactions chimiques ou des cellules. De nombreuses applications mettent en jeu l'interaction de plusieurs liquides non-miscibles et d'un solide. Les gouttes de pluie restent accrochées ou non sur une vitre, en fonction notamment de leur volume. L'extraction du pétrole des roches réservoirs nécessite en général l'injection d'eau dans le milieu poreux. En génie chimique, on utilise des bulles ou des mousses pour séparer un métal de sa gangue, dans le procédé dit de « flottation ». En formulation, la maîtrise du mouillage est essentielle pour optimiser l'étalement de films, des peintures ou des pesticides par exemple, ou pour mettre des poudres en suspension dans des liquides.

### 9.1 Introduction expérimentale et origine de la tension de surface

#### 9.1.1 Une première expérience

Une expérience classique permettant de mettre expérimentalement en évidence l'influence de la tension de surface est présentée sur la figure 9.1. Un film d'eau et de savon est formé dans un cadre rigide contenant un motif souple en corde fine. On perce le cadre central le film couvrant la zone centrale et on observe que le fil est tiré par le liquide jusqu'à ce que la corde souple prenne une forme quasi-circulaire.

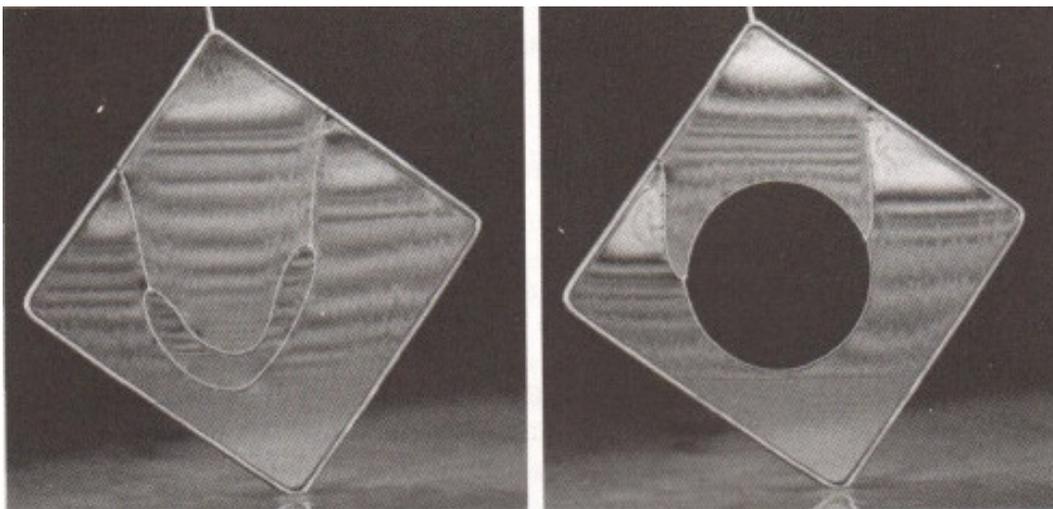


FIGURE 9.1 – Manifestation expérimentale de la tension de surface.

À une interface entre deux fluides non-miscibles (ici le mélange eau-savon et l'air) de longueur  $dl$  et vecteur

normal  $\vec{n}$  est ainsi associée une force *tangentielle*

$$d\vec{F}_\gamma = \pm\gamma(\vec{n} \wedge d\vec{l}),$$

qui s'oriente de manière à diminuer l'aire de l'interface. Cette force est associée à la tension de surface. Cette même expérience peut être menée de manière quantitative sur un cadre rectangulaire dont la géométrie est connue et les forces qui s'exercent mesurables. On peut alors mesurer que l'énergie fournie par cette force est proportionnelle à la surface balayée par le contour :

$$\delta W = \gamma dS.$$

Le coefficient de proportionnalité  $\gamma$  est appelé COEFFICIENT DE TENSION SUPERFICIELLE. Son unité est le  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ . En effet,

$$[\delta W] = [\gamma][dS] \quad \text{i.e.} \quad [\gamma] = \frac{[\delta W]}{[dS]} = \frac{[F]L}{L^2} = [F]L^{-1}.$$

La tension de surface est une énergie par unité de surface, ou force par unité de longueur.

Liquide	$\gamma_{\text{liq-air}} (\text{mN} \cdot \text{m}^{-1})$	$T (^\circ\text{C})$
Eau	72	20
Eau	58	100
Eau - huile	~ 50	20
Éthanol	23	20
Cyclohexane	25	20
Mercure	485	20

TABLE 9.1 – Ordre de grandeur de tensions de surface. Sauf indication contraire, il s'agit de la tension de surface liquide-air. La pression est de  $10^5$  Pa.

On peut déjà retenir que *la tension de surface a pour effet de minimiser l'aire de l'interface entre les fluides, en fonction des contraintes imposées par ailleurs évidemment.*

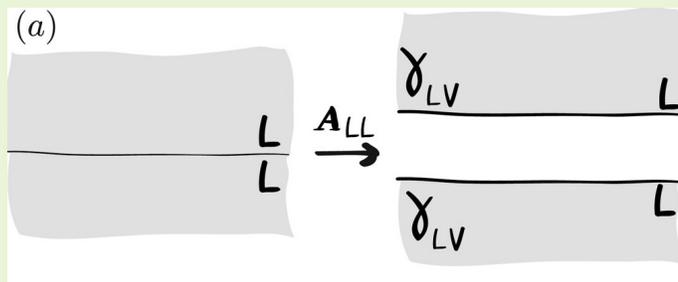
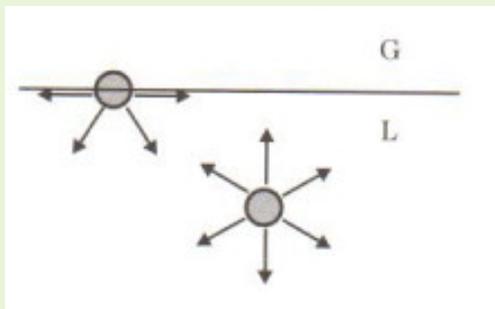
#### Exercice n°36 : Fusion de deux gouttes

Expliquer quantitativement que lorsqu'on met deux gouttes en contact elles ont intérêt à fusionner pour ne former qu'une seule goutte plus grosse.

### 9.1.2 Origine microscopique

L'explication communément admise quant à l'origine de la tension de surface est l'asymétrie des interactions pour les molécules au voisinage de l'interface.

En effet, une molécule dans le volume du fluide est attirée dans toutes les directions de manière équivalente. En revanche, lorsqu'on regarde une particule en surface, les interactions attractives à longue portée qu'elle subit sont non asymétriques : elle est fortement attirée vers le fluide, et nettement moins vers le gaz supérieur. Par conséquent, on dit souvent que « pour former une interface entre deux fluides il faut rompre la moitié de ces interactions »



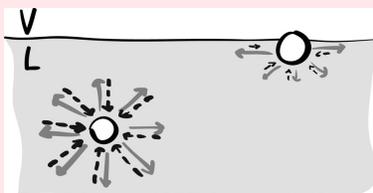
(gauche) : Interactions attractives que subit une molécule du liquide selon qu'elle est située en surface ou en volume. La phase du haut est une phase gaz avec laquelle le liquide interagit très peu.

(droite) : Représentation schématique de l'énergie à fournir pour séparer un fluide en deux parties infiniment éloignées et ainsi « créer une interface ».

Il est donc cohérent que la tension superficielle, associée aux forces de cohésion internes qui s'exercent entre les molécules d'un fluide, dépendent drastiquement de leur nature (forces de van der Waals, liaisons hydrogène, liaisons ioniques, liaisons métalliques (dans les métaux comme le mercure), etc.). La forte tension superficielle des métaux liquides (comme le mercure par exemple) s'explique par la forte valeur des énergies associées aux liaisons métalliques (valeurs typiques de tension superficielle de  $0,5$  à  $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) alors que les forces de van der Waals, qui jouent un rôle prépondérant dans de nombreux corps moléculaires, ne donnent des valeurs que de l'ordre de  $2$  à  $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . La grande majorité des fluides communs étant moléculaires, l'unité de la tension superficielle est d'ailleurs plus généralement le  $\text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### Attention !

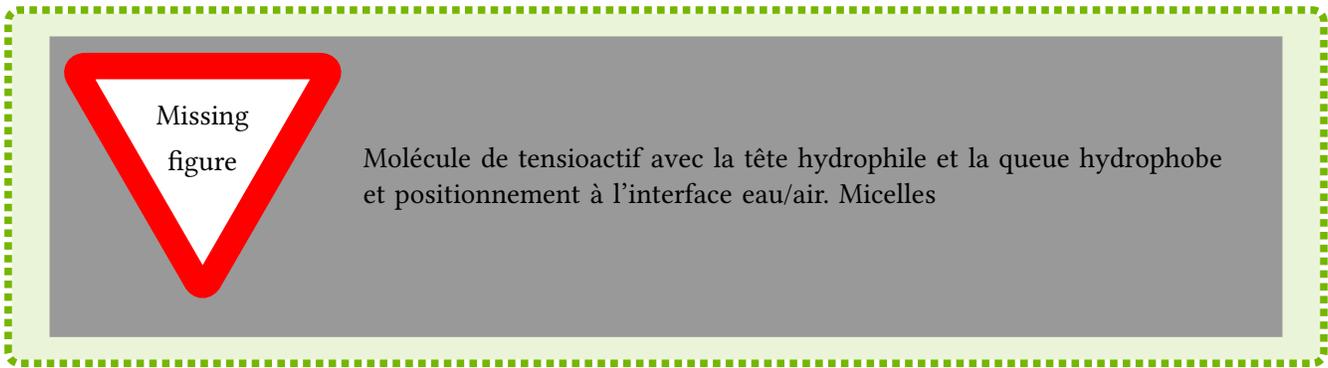
Cette description est complètement stupide à ses limites. En effet, on s'aperçoit que cette description seule mène à une tension de surface normale à la surface ce qui n'est pas du tout le cas. En réalité, il faut étudier de plus près l'équilibre entre les forces à longue et courte portée.



### 9.1.3 Influence des tensioactifs et de la température

#### Tensioactifs

Par souci de simplicité, on considère ici une interface eau-air. Le cas des autres interfaces est semblable. On appelle TENSIOACTIF une molécule dont une partie a de l'affinité pour l'eau (partie HYDROPHILE) et une partie qui a peu d'affinité pour l'eau (partie HYDROPHOBE). Les molécules de tensioactifs ont ainsi tendance à se placer à l'interface entre l'eau et l'air.



Les tensioactifs rendent ainsi plus favorable l'apparition d'une interface et se faisant abaissent le coût énergétique de sa création donc la tension de surface associée.

#### Remarque

1. Les savons sont des tensioactifs.
2. On appelle parfois les tensioactifs « surfactants », « agents de surface » ou « molécules amphiphiles ».

### Température

La diminution de la cohésion d'un liquide lorsque la température augmente se traduit par une diminution de la tension superficielle avec la température. Pour des variations modérées de température, on peut traduire cette dépendance par l'expression suivante :

$$\gamma(T) = \gamma(T_0)[1 - b(T - T_0)].$$

Le coefficient  $b$ , de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-1} \text{ K}^{-1}$ , est positif, ce qui traduit la diminution de l'énergie de surface liée à la diminution de cohésion du liquide lorsque la température augmente. Ainsi, le coefficient de tension superficielle s'annule au point critique.

L'objet de tout ce qui suit est de présenter les conséquences diverses de cette force nouvellement mise en évidence aux interfaces.

## 9.2 Loi de Laplace

### 9.2.1 Cas d'une sphère

On considère une goutte (ou une bulle si le fluide intérieur est un gaz) sphérique de rayon  $R$  d'un fluide  $A$  dans un autre fluide  $B$ . On note  $P_{\text{int}}$  la pression (supposée uniforme) à l'intérieur de la goutte, et  $P_{\text{ext}}$  la pression (supposée uniforme) à l'extérieur de la goutte. On note  $\gamma$  la tension de surface entre les deux fluides. La goutte est supposée à l'équilibre (mécanique et thermodynamique). Alors :

$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{R}. \quad (9.1)$$

L'intérieur de la goutte est en surpression par rapport à l'extérieur pour maintenir l'équilibre. En effet, la tension de surface tend à diminuer le rayon de la goutte. Il faut une surpression pour s'y opposer et que la goutte soit à l'équilibre.

*Démonstration :* On s'appuie sur le schéma de la figure 9.2. La demie-sphère haute subit trois forces, l'axe vertical  $Oz$  étant orienté vers le haut :

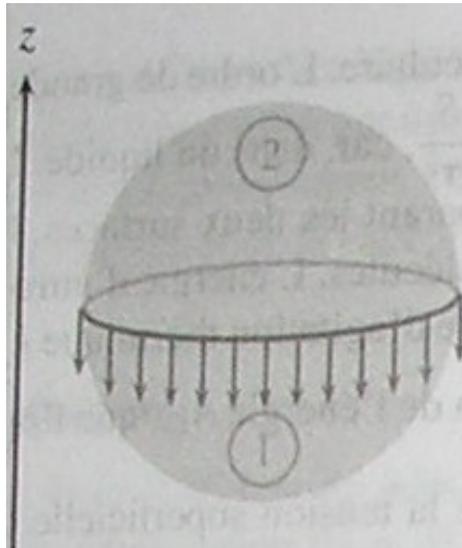


FIGURE 9.2 – Goutte liquide sphérique.

La résultante des forces de pression internes  $\vec{F}_{\text{int}} = P_{\text{int}}\pi R^2\vec{u}_z$ ; la résultante des forces de pression externes  $\vec{F}_{\text{ext}} = -P_{\text{ext}}\pi R^2\vec{u}_z$  et la force de tension de surface qui s'exerce sur tout le contour à l'équateur  $\vec{F}_\gamma = -\gamma 2\pi R\vec{u}_z$ . À l'équilibre, on a donc

$$(P_{\text{int}} - P_{\text{ext}})\pi R^2 - \gamma 2\pi R = 0 \quad \text{soit} \quad (P_{\text{int}} - P_{\text{ext}}) = \frac{2\gamma}{R}.$$

### Attention !

Lorsqu'on regarde la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une bulle de savon (par exemple) il faut prendre en compte la présence de *deux* interfaces eau/air et on a ainsi

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{R}.$$

### 9.2.2 Cas général

On appelle courbure  $C$  d'une courbe l'inverse du rayon de courbure ( $C = 1/R$ ), qui est le rayon du cercle qui approxime le mieux la courbe au point considéré. Mathématiquement, pour une courbe  $y = f(x)$ , la courbure vaut :

$$C = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

On considère l'interface entre les milieux (1) et (2) (voir figure 9.3). On choisit deux courbes perpendiculaires entre elles, et qui appartiennent à l'interface. On appelle courbure au point considéré, et on note  $C$  la somme des deux courbures :

$$C = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

La courbure ne dépend pas des deux courbes choisies tant qu'elles sont bien perpendiculaires entre elles (ce théorème non trivial est dû à Gauss). On admet que dans ce cas général, la loi de Laplace s'écrit :

$$P_1 - P_2 = \gamma C = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right). \quad (9.2)$$

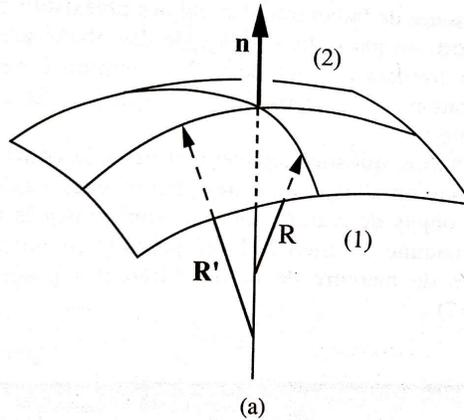


FIGURE 9.3 – Notion de courbure.

**Remarque**

1. En pratique, lorsque l'on utilise la formule (9.2), il faut vérifier que les signes sont cohérents.
2. Pour une sphère on a  $C = 2 \times \frac{1}{R}$ . Le cas de la sphère est bien compatible avec la formule générale.

**9.3 Mouillage**

Dans cette section, on étudie l'interaction entre deux fluides non-miscibles et un solide. Dans les exemples, on choisira comme fluides un liquide et une vapeur. Le cas où les deux fluides sont deux liquides est analogue.

**9.3.1 Ligne triple et angle de contact**

On considère le cas très général d'une goutte de liquide posée sur un solide. Il existe entre ces trois phases une frontière appelée LIGNE TRIPLE. Lorsque cette ligne est stable, les trois forces interfaciales doivent se compenser. Notons  $\theta$  l'angle de contact mesuré *dans le liquide*, appelé ANGLE DE CONTACT, ANGLE DE MOUILLAGE APPARENT OU ANGLE MACROSCOPIQUE.

- Si  $\theta$  est faible, on parle de situation MOUILLANTE : le liquide s'étale beaucoup sur le solide.
- Si  $\theta$  est grand, on parle de situation NON MOUILLANTE : le liquide s'étale très peu sur le solide.

La situation intermédiaire, très généralement obtenue, est dite de MOUILLAGE PARTIEL.

**9.3.2 Relation de Young-Dupré**

Le principe fondamental de la dynamique appliqué sur une longueur  $dl$  de la ligne triple, à l'équilibre, donne en projection sur l'axe parallèle à l'interface :

$$\gamma_{SL}dl + \gamma_{LG} \cos(\theta)dl = \gamma_{GS}dl$$

soit

$$\cos(\theta) = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} \quad (9.3)$$

Cette équation est appelée LOI D'YOUNG-DUPRÉ. L'angle de contact, à l'équilibre, n'est ainsi déterminé que par les différentes tensions de surface des trois interfaces.

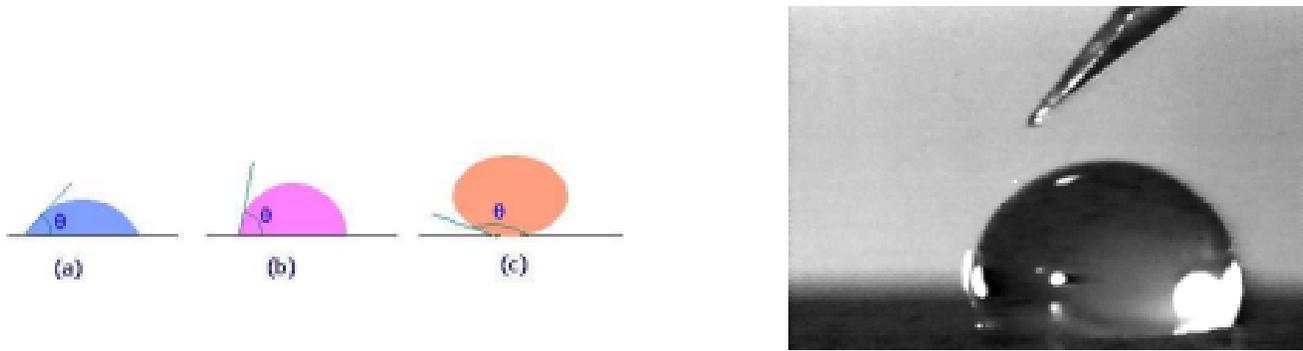


FIGURE 9.4 – (gauche) : Trois situations de moins en moins mouillante. (droite) : Goutte d'eau sur une surface cirée peu mouillante.

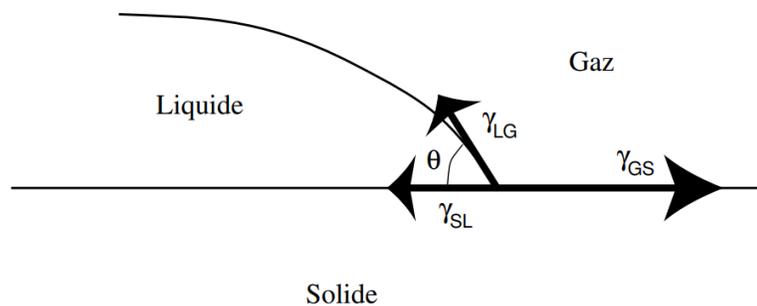


FIGURE 9.5 – Force s'appliquant sur la ligne triple de contact.

On distingue les cas :

- Si  $\frac{|\gamma_{SG} - \gamma_{SL}|}{\gamma_{LG}} < 1$ , on est dans le cas de mouillage partiel. Une goutte posée sur le solide possède un angle de contact fini.
- Si  $\gamma_{LG} < \gamma_{SG} - \gamma_{SL}$ , l'équation (9.3) ne permet plus de définir un angle  $\theta$ . Elle montre que le coût de deux interfaces liquide/vapeur et solide/liquide est plus faible que celui d'une seule interface solide/vapeur. On parle alors de mouillage total. Dans ce cas, un film dit de prémouillage ou film précurseur (épaisseur souvent de l'ordre de quelques 0,1 nm) recouvre toute la surface du solide, lorsque l'équilibre est atteint. On pose souvent  $S = \gamma_{SG} - (\gamma_{SL} + \gamma_{LG})$  appelé PARAMÈTRE D'ÉTALEMENT. Le mouillage total correspond à  $S > 0$ .
- $\gamma_{LG} > \gamma_{SG} - \gamma_{SL}$  : ici c'est l'interface solide/liquide qui disparaît. On parle de non mouillage.

#### Remarque

Cette approche très usuelle pour établir la loi d'Young souffre des problèmes suivants :

- la ligne triple n'est pas un système matériel, ce n'est donc pas un système admissible pour appliquer les lois de la mécanique ;
- il est difficile d'imaginer comment la force  $\gamma_{SG}$  s'applique ;
- des simulations numériques précises et des analyses théoriques donnent une autre distribution des forces.

Cependant, elle donne le bon résultat, ce qui n'est pas un hasard car elle est équivalente à l'approche éner-

gétique (via la principe des travaux virtuels, hors programme). Il s'agit de l'approche à utiliser à l'agrégation de chimie, sauf mention explicite du contraire dans l'énoncé.

La version plus rigoureuse consiste à mener une étude énergétique.

### Attention !

La composante transverse appliquée par l'interface gaz-liquide  $\gamma_{LG} \sin \theta$  sur la surface solide est en général équilibrée par la rigidité de ce solide mais on peut parfois observer une légère déformation pour des gels très souples. Dans le cas où l'on a deux liquides et un gaz, par exemple une lentille d'huile à la surface de l'eau, il faut alors aussi écrire l'équilibre des forces verticales.

## 9.4 Manifestations expérimentales de la tension de surface

### 9.4.1 Loi de Jurin

On considère un tube de faible rayon  $r$  plongé dans un liquide. Au-dessus du liquide se trouve une vapeur. Sous certaines conditions, on peut observer l'ascension du liquide à une hauteur  $h$  (voir figure 9.6). On note  $\rho$  la masse volumique du liquide. On néglige la masse volumique de la vapeur.

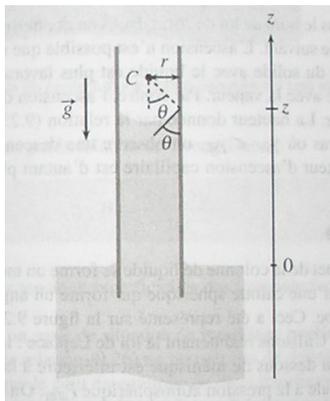


FIGURE 9.6 – Ascension capillaire dans un tube.

#### Utilisation de la loi de Laplace

Pour les tubes de rayons faibles, l'interface liquide-vapeur prend la forme d'une calotte sphérique de rayon  $R = r/\cos(\theta)$ , où  $\theta$  est l'angle de raccordement avec la paroi verticale du tube et  $r$  le rayon du tube. D'après la loi de Laplace, la pression dans le liquide en haut du tube vaut :

$$p_{\text{atm}} - p(h) = 2\gamma \frac{1}{R} = 2\gamma \frac{\cos(\theta)}{r}. \quad (9.4)$$

L'équilibre hydrostatique donne à son tour :

$$p(h) = p(z = 0) - pgh = p_{\text{atm}} - pgh. \quad (9.5)$$

On déduit des deux expressions précédentes :

$$h = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{\rho gr} = 2 \frac{l_c^2}{r} \cos(\theta). \quad (9.6)$$

L'équation (9.6) donne bien le même résultat que l'équation (??) si la loi d'Young-Dypré (9.3) est vérifiée. Dans le cas où on prend en compte l'hystérésis de l'angle de contact, il faut utiliser l'équation (9.6) qui ne fait pas l'hypothèse d'équilibre de la ligne triple.

### Équation sur les forces

On peut aussi obtenir la loi de Jurin en écrivant l'équilibre des forces, en l'occurrence le poids de la colonne de fluide  $P = \pi r^2 h \rho g$  et la force de tension superficielle  $2\pi r \gamma \cos(\theta)$  qui aboutit aussi à

$$h = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r\rho g}.$$

### 9.4.2 Goutte pendante

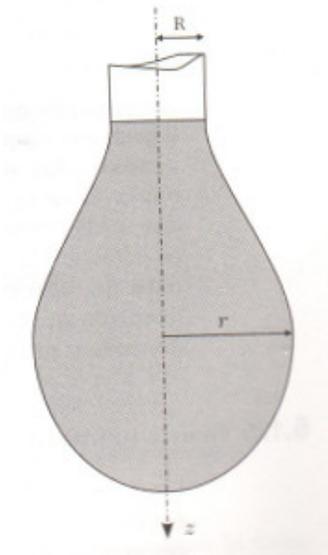


FIGURE 9.7 – Goutte pendante. L'ajustement du profil de la goutte permet de mesurer la tension de surface  $\gamma$ .

On considère une goutte immobile composée d'un liquide de masse volumique connue, qui pend sous son propre poids en étant accrochée à une aiguille (voir figure 9.7). La courbure  $C$  locale dépend du rayon  $r$  local. Par axisymétrie ces deux quantités ne dépendent que de  $z$  et peut exprimer  $C(z)$  en fonction de  $r(z)$ . En ajustant le profil de la goutte, on obtient  $\gamma$  avec une bonne précision. L'avantage de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire de connaître l'angle de contact avec l'aiguille. Cette méthode est très utilisée dans les laboratoires.

## 9.5 Application à la formulation

### 9.5.1 Définitions et objectifs de la formulation

On appelle FORMULATION l'ensemble des opérations mises en œuvre lors du mélange ou de la mise en forme d'ingrédients (matières premières), souvent incompatibles entre eux, de façon à obtenir un produit commercial caractérisé par sa fonction d'usage (laver du linge, soigner un malade, peindre une voiture, etc.). En clair, il s'agit de déterminer la recette d'un dentifrice, d'une peinture, d'un médicament, etc.

### 9.5.2 Comment obtenir un bon mouillage ?

Obtenir un bon mouillage est une question est essentielle pour la formulation des adhésifs, qui doivent s'étaler de manière régulière sur la surface des pièces à coller pour assurer une bonne adhésion, des peintures, qui doivent

s'étaler complètement sur la surface à peindre, des pesticides, qui doivent s'étaler sur les feuilles par exemple. Il y a deux types de méthodes pour assurer un mouillage total : augmenter la tension de surface du solide par des méthodes physiques ou chimiques ou diminuer la tension de surface du liquide

### Méthodes physiques de traitement des surfaces

La tension de surface d'un solide diminue si la surface de celui-ci est recouvert d'impuretés. Pour augmenter  $\gamma_C$ , on peut polir la surface solide. Pour les métaux, on peut utiliser un solvant organique (par exemple le dichlorométhane) pour dégraisser la surface. On peut aussi chauffer le métal à rouge. Pour le verre on peut frotter la surface avec des cristaux de soude ou utiliser une solution « piranha » (acide sulfurique + eau oxygénée, dans les bonnes proportions sinon il y a des risques d'explosion).

L'efficacité de ces méthodes est facile à tester pour le verre : l'eau ne mouille pas complètement le verre sale (vitres), mais mouille complètement du verre nettoyé à la soude.

### Méthodes chimiques de traitement des surfaces

**Conversion chimique des métaux** Les procédés de conversion chimique consistent en la formation de composés inorganiques complexes parfaitement adhérents au métal traité. La PHOSPHATATION est une méthode employée pour traiter l'acier (par exemple les châssis de voiture) : on plonge l'acier dans un bain phosphatant composé principalement de phosphate de zinc  $Zn(H_2PO_4)_2$  (procédé appelé bondérisation) ou de phosphate de manganèse  $Mn(H_2PO_4)_2$  (parkérisation) et d'acide phosphorique  $H_3PO_4$ .

**Traitement des matières plastiques** Pour augmenter  $\gamma$  pour une surface en plastique, on utilise les traitement au plasma et le traitement corona. Dans les deux cas, la surface est oxydée par un plasma (« combustion froide »). Ce plasma est obtenu à l'aide d'un générateur de haute tension. Le traitement au plasma est réalisé sous atmosphère inerte (argon), et le traitement corona à l'air libre (affaiblit le transfert d'énergie), voir figure 9.8.

L'avantage de ces traitements est qu'ils ne changent que la surface, et conservent les propriétés en volume (résistance mécanique par exemple) du plastique. L'apparence du plastique est également conservée.

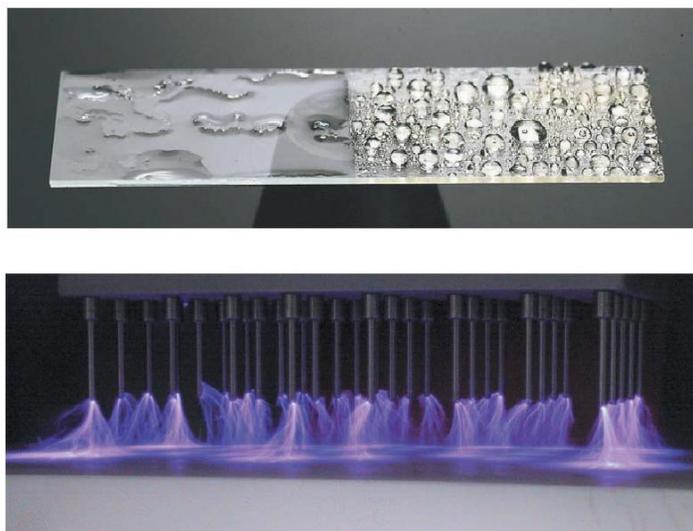


FIGURE 9.8 – (haut) : plaque de plastique dont seule la moitié gauche a subi un traitement corona. (bas) : traitement corona. Le plasma est violet ici.

### Additifs pour maîtriser le mouillage

Pour améliorer le mouillage, il est aussi possible d'ajouter un surfactant au liquide. On ajoute par exemple des tensioactifs siliconés aux pesticides pour améliorer l'étalement de ce produit sur les feuilles, et aux peintures pour améliorer l'étalement sur le substrat. L'intérêt des tensioactifs siliconés est qu'ils ne provoquent pas la formation d'une mousse abondante.



FIGURE 9.9 – Étalement d'un pesticide avec ou sans ajout de tensioactif.

#### 9.5.3 Comment obtenir un mauvais mouillage ?

Il n'est pas toujours souhaitable d'obtenir un bon mouillage. Par exemple, il faut que l'eau s'évacue le plus possible de la surface d'un pneu, pour éviter le phénomène d'aquaplaning. Il est aussi utile d'hydrofuger un béton pour éviter les infiltrations d'eau.

Une méthode pour rendre du verre ou du béton hydrophobes est de greffer des molécules contenant des groupement silicone à la surface du solide. Ces groupements diminuent la tension de surface, et possèdent des interactions peu favorables avec l'eau.

## 9.6 Complément : Ondes à la surface d'un fluide

### 9.6.1 Relation de dispersion

On supposera les fluides incompressibles et surtout l'écoulement irrotationnel. En effet si on considère un fluide immobile (donc forcément irrotationnel) avant l'arrivée des vagues, il doit rester irrotationnel, au moins à court terme et loin des parois (la vorticité est éventuellement présente sur le fond ou à l'interface si les fluides sont visqueux). En négligeant l'effet de la viscosité, nous étudierons la propagation des ondes sans atténuation. Si l'écoulement dans chaque fluide est irrotationnel,  $\text{rot}(\vec{v}_i) = \vec{0}$  (avec  $i = 1, 2$ ) et l'on peut écrire  $\vec{v}_i = \text{grad}(\Phi_i)$ , le champ de vitesse dérive d'un potentiel. Si de plus l'écoulement est incompressible,  $\text{div} \vec{v}_i = 0$  et donc  $\Delta\Phi_i = 0$ . Le potentiel des vitesses satisfait donc l'équation de Laplace.

En recherchant des solutions périodiques propagatives dans la direction des  $x$  croissants on peut écrire :  $\Phi_i = f_i(z) \exp(i(kx - \omega t))$ . Les ondes étant supposées linéaires, nous pouvons utiliser la notation complexe sans problème en prenant à la fin des calculs la partie réelle du résultat.

L'équation de Laplace impose que :

$$f_i'' - k^2 f_i = 0 \quad \text{soit} \quad f_i(z) = A_i \exp(kz) + B_i \exp(-kz).$$

Dans le cas de milieux infinis au-dessus et au-dessous de l'interface, la condition de non divergence de  $f_i$  pour  $z \rightarrow \pm\infty$  donne  $A_2 = B_1 = 0$ . (Le cas d'une profondeur finie sera traité plus loin). L'équation d'Euler doit être satisfait pour chaque fluide :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \text{grad} \right) \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \text{grad}(p_i) + \vec{g}.$$

Le terme convectif non-linéaire peut-être négligé si  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_i \ll \partial \vec{v}_i / \partial t$ . On peut estimer l'ordre de grandeur de ces deux termes car  $v_i \sim \xi_0 / T$ , la condition devenant  $k \xi_0 / T \ll 1 / T$  soit  $\xi_0 k \ll 1$  ce qui correspond bien à notre choix d'ondes de faible amplitude.

L'équation devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi_i) + \frac{1}{\rho_i} \overrightarrow{\text{grad}}(p_i) - \vec{g} = 0 \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz \right) = 0,$$

et finalement :

$$p_i = -\rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \rho_i gz + C_i.$$

Ceci correspond à l'équation de Bernoulli instationnaire (§ 5.3.2) dans laquelle on néglige le terme en  $v^2$  à cause de l'hypothèse de faible amplitude. La surface plane devant être solution, on a  $C_1 = C_2 = P_{\text{atm}}$ . En particulier à l'interface nous avons :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - (\rho_1 - \rho_2) g \xi. \quad (9.7)$$

À cela s'ajoute les conditions limites, qui sont de deux sortes, cinématiques (égalité des vitesses transverses à l'interface) et dynamiques (égalité des contraintes normales). Pour la première, comme l'amplitude de la déformation est faible, il suffit que :

$$v_{z1} = v_{z2} \quad \text{soit} : \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Cette condition nous donne ici la relation  $kA_1 = -kB_2 = -i\omega\xi_0$ . Ceci nous permet d'exprimer les constantes d'intégration  $A_1$  et  $B_2$  en fonction de l'amplitude de l'onde :

$$\Phi_1 = -i \frac{\omega}{k} \xi_0 \exp(kz) \exp(i(kx - \omega t)) \quad \text{et} \quad \Phi_2 = i \frac{\omega}{k} \xi_0 \exp(-kz) \exp(i(kx - \omega t)).$$

La condition dynamique nous dit que la différence de pression sur une interface courbée est donnée par la loi de Laplace :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \gamma \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right],$$

où  $\gamma$  est la tension de surface. Ici pour des ondes planes (invariantes en  $y$ ) nous avons un seul rayon de courbure et la courbure étant faible :  $p_1 - p_2 \approx -\gamma \partial^2 \xi / \partial t^2$  soit :

$$p_1 - p_2 = \gamma k^2 \xi.$$

En rassemblant ces trois résultats on obtient finalement la relation de dispersion des ondes planes linéaires en eau profonde :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} k^3}. \quad (9.8)$$

Notons que si  $\rho_1 < \rho_2$  la pulsation est complexe, c'est-à-dire que l'on est en présence d'une instabilité. C'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui sera décrite plus loin. L'équation précédente peut aussi s'écrire :

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right],$$

avec  $k_c = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) g / \gamma}$ .

Ce nombre d'onde de coupure  $k_c$ , appelé nombre d'onde capillaire, sépare le régime des ondes capillaires (petites longueurs d'onde – ou grands  $k$  – contrôlées par la tension de surface) de celui des ondes de gravité (grandes longueurs d'onde – ou petit  $k$  – gouvernées par la gravité). La relation de dispersion  $\omega(k)$  n'étant pas linéaire, les ondes interfaciales sont dispersives ( $v_\varphi \neq v_g$ ).

### 9.6.2 Application aux ondes à la surface de l'eau

Dans le cas des ondes à la surface de l'eau, les densités des deux fluides (air et eau) étant dans un rapport 1000 environ, on peut négliger  $\rho_2$  devant  $\rho_1$  et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (9.9)$$

Dans le cas air/eau  $\lambda_c = 2\pi l_c = 2\pi/k_c \approx 17$  mm. L'évolution de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe avec le nombre d'onde est représenté sur la figure 9.10.

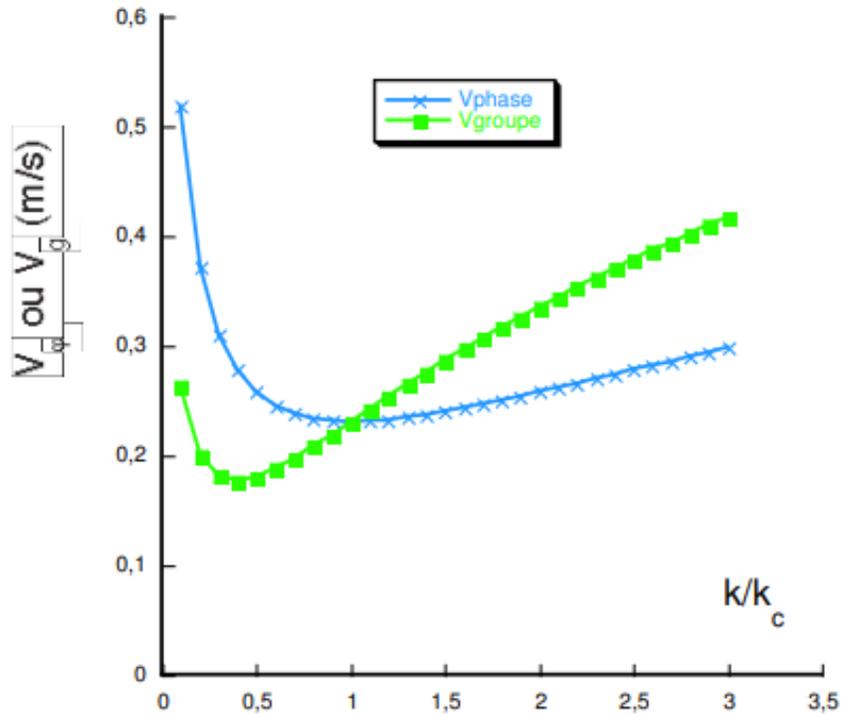


FIGURE 9.10 – Vitesses de phase et de groupe des ondes à la surface de l'eau en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k/k_c$ .

#### Limite des ondes de gravité

Si  $k \ll k_c$  ( $\lambda \gg 17$  mm) on est dans le domaine des ondes de gravité et la relation de dispersion se simplifie en

$$\omega^2 = gk.$$

La vitesse de phase s'écrit alors  $v_\varphi = \sqrt{g/k} = g/\omega$  et la vitesse de groupe vaut  $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$ . Les ondes de gravité sont donc des ondes non-dispersives.

#### Limite des ondes capillaires

Si  $k \gg k_c$  ( $\lambda \ll 17$  mm) on est dans le domaine des ondes capillaire et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = g \frac{k^3}{k_c} = \frac{\gamma}{\rho} k^3.$$

La vitesse de phase s'écrit alors  $v_\phi = \sqrt{\gamma k / \rho}$  et la vitesse de groupe vaut  $v_g = \frac{3}{2} v_\phi$ . En pratique ces ondes ne sont pas longtemps observables car elles sont fortement dissipées par la viscosité.

**Exercice n°37 : Quelques calculs sur les ondes de surface**

On considère des ondes de surface à l'interface eau/air en milieu de profondeur infinie.

1. Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont égales si  $k = k_c$ .
2. Montrer que les ondes de surface ne peuvent pas se propager en dessous d'une certaine vitesse. Calculer ce minimum de la vitesse de phase et montrer qu'il vaut  $23 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  pour de l'eau pure.