

Mécanique
pour la préparation à l'agrégation de chimie

Jules FILLETTE
jules.fillette@phys.ens.fr

5 septembre 2022

Ce TD/Cours comporte sept sections. Toutes seront abordées en classe sauf peut-être la section 6 qui sera de toute façon abordée en électricité. Elles sont composées d'un rappel de cours comportant l'essentiel de ce qu'il faut savoir, d'exercices d'illustration portant sur des points spécifiques, et d'autres, placés en fin de chapitre, plus transverses. Certains exercices seront faits et corrigés en classe, d'autres vous seront laissés pour l'entraînement. La correction est systématiquement distribuée en fin de chapitre. Parfois, le chapitre se termine par une ouverture, au-delà du programme de physique du concours, mais intéressante pour la culture.

Quelques repères historiques

- Archimède (III^e s. av. JC) donne une description géométrique de la mécanique. Il parle déjà de centre de gravité, comprend l'intérêt du bras de levier, et fonde l'hydrostatique. Il n'est pas encore question de mouvement mais il est le premier à s'intéresser à l'agencement des corps au repos.
- D'Aristote au moyen-âge le mouvement est transmis par contact avec un « premier moteur ». L'évolution du corps par la suite suit pour objectif d'atteindre son « lieu propre » où il trouvera l'immobilité.
- De Vinci, puis Galilée au XV^e/XVI^e siècle étudient la chute des corps le long de plans inclinés et donnent l'idée de dynamique : concept d'accélération, principe d'inertie, ... Par la suite, les observations et relevés de plus en plus précis d'astronomes comme Tycho Brahe permettent à Kepler de déduire bientôt (1609 & 1618) les trois lois qui portent aujourd'hui son nom.
- Celles-ci sont expliquées de manière convainquantes en 1687 dans les *Principia* de Newton. Même s'ils fondent la mécanique (lois de Newton), le raisonnement est encore très géométrique. Il faudra attendre la formalisation par Euler, Lagrange et d'Alembert au siècle suivant pour voir apparaître les équations de la mécanique telles qu'on les connaît.
- Au XIX^e siècle, confrontée à des mouvements de vitesse de plus en plus grande, et à la théorie électromagnétique de Maxwell qui s'impose progressivement, la mécanique connaît une crise qui mènera Einstein à la théorie de la relativité restreinte d'abord, puis générale.

La mécanique à l'agrégation de chimie

La mécanique en composition de physique

2022 Chute libre, système de masse variable,

2021 Exercice sur un oscillateur amorti par frottement fluide. Équation du mouvement et portrait de phase. Décroissement logarithmique. Analogie entre mécanique et électrostatique. Champ créé par une sphère massive. Définition : référentiel, lois de Newton, énergies cinétique et potentielle, système conservatif.

2020 Modèle mécanique de sismomètre. Réponse à une vibration du sol.

2018 Un oscillateur un peu bizarre pour récupérer l'énergie de la marche au niveau des hanches.

2017 Pendule simple. Équation du mouvement. Poulie. Hypothèse de non glissement. Équation du mouvement. Mouvement d'une bille dans un fluide visqueux. Oscillateur vertical entretenu.

2016 Modélisation de la molécule HCl par un système masse ressort.

La mécanique dans les thèmes de la session 2022 À cette session, vos camarades ont notamment du planché sur les titres suivants :

- *Conservation de l'énergie* - niveau : supérieur - E.I. : Mouvement conservatif à une dimension, exploitation d'un graphe d'énergie potentielle ;
- *Poids et gravitation* - niveau : lycée - E.I. : Loi de période de révolution d'un satellite.

Les thèmes proposés par le rapport d'épreuve comprenaient, en ce qui concerne la mécanique :

- Aspects énergétiques de phénomènes physiques (Lycée)

- L'énergie, conversion et transferts (Lycée)
- Gravitation et poids (Lycée)
- Mouvement, interactions et notion de champ (Lycée)
- Conservation de l'énergie (CPGE)
- Oscillations (CPGE)
- Régimes transitoires (CPGE)
- Filtrages (CPGE)

Table des matières

1	Cinématique du point et des solides	9
1.1	Cadre de l'étude menée	9
1.2	Référentiel, repère, coordonnées	9
1.2.1	Espace et temps en mécanique classique	9
1.2.2	Référentiel	10
1.2.3	Repère et coordonnées	10
1.3	Description du mouvement d'un point matériel	13
1.3.1	Objets de la description du mouvement	13
1.3.2	Expressions dans les divers systèmes de coordonnées	15
1.4	Mouvement d'un solide	17
1.4.1	Définition	17
1.4.2	Translation	17
1.4.3	Rotation autour d'un axe fixe	17
1.5	Exercices complémentaires	19
2	Dynamique du point et prolongement aux systèmes de points	21
2.1	Objets de la dynamique, lois de Newton	21
2.1.1	Quantité de mouvement	21
2.1.2	Bilan des forces	22
2.1.3	Première loi de Newton : principe d'inertie	22
2.1.4	Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)	22
2.1.5	Troisième loi de Newton : loi des actions réciproques	23
2.2	Mise en applications avec quelques forces classiques	23
2.2.1	Force d'attraction gravitationnelle, poids	23
2.2.2	Force de rappel du ressort	26
2.2.3	Poussée d'Archimède	29
2.2.4	Frottements fluides	31
2.2.5	Frottements solides, réaction du support	32
2.2.6	Forces exercées sur une particule chargée	33
2.3	Ouverture : les quatre interactions fondamentales	34
2.4	Exercices complémentaires	34
3	Aspects énergétiques	43
3.1	Énergie développée par une force	43
3.2	Énergies usuelles des systèmes mécaniques	43
3.3	Théorèmes énergétiques	46
3.3.1	Théorème de la puissance/l'énergie cinétique	46
3.3.2	Théorème de l'énergie mécanique	46
3.4	Équilibre et stabilité	47
3.4.1	Notion d'équilibre mécanique	47

3.4.2	Stabilité d'une position d'équilibre	48
3.5	Exercices complémentaires	49
4	Moment cinétique	53
4.1	Définitions	53
4.1.1	Nécessité	53
4.1.2	Moment cinétique d'un point matériel	53
4.2	Théorème du moment cinétique	54
4.2.1	Moment d'une force	54
4.2.2	Théorème du moment cinétique	54
4.3	Moment cinétique d'un solide, énergie de rotation	55
4.3.1	Axe de rotation d'un solide	55
4.3.2	Lien entre rotation et moment cinétique	56
4.3.3	Énergie de rotation	56
4.4	Exercices complémentaires	58
5	Oscillateurs harmonique et amortis en régime libre	61
5.1	Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre	61
5.1.1	Potentiel proche de l'équilibre	61
5.1.2	Cas de l'équilibre instable	61
5.2	Oscillateur harmonique	62
5.2.1	Équation du mouvement	62
5.2.2	Équations horaires	63
5.2.3	Persistence des oscillations dans le temps	63
5.2.4	Isochronisme des oscillations	63
5.2.5	Échange d'énergie potentielle et cinétique	64
5.3	Oscillateurs amortis	64
5.3.1	Modélisation du frottement	64
5.3.2	Équations du mouvement	65
5.3.3	Régimes d'évolution	65
5.3.4	Oscillateur amorti par frottements solides	66
5.4	Portrait de phase	67
5.5	Exercices	69
6	Oscillateurs en régime forcé - Résonance	73
6.1	Mise en équation	73
6.2	Série de Fourier et méthode complexe	74
6.2.1	Développement en série de Fourier	74
6.2.2	La méthode complexe	74
6.3	Intuition expérimentale	75
6.4	Résonance en position	75
6.4.1	Résolution complexe	75
6.4.2	Diagramme de Bode	76
6.5	Résonance en vitesse	76
6.6	Exercice d'application	77
7	Mouvement dans les champs \vec{E} et \vec{B}	79
7.1	Premiers aspects dynamiques	79
7.1.1	Rappels et compléments sur la force de Lorentz	79
7.1.2	Aspects énergétiques	80
7.2	Mouvement dans un champ électrostatique uniforme	80

7.3	Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme	81
7.3.1	Équations du mouvement	81
7.3.2	Trajectoire	82
7.3.3	Quelques applications	83
7.4	Piégeage de particules chargées	84
7.4.1	Un piège électrostatique ?	84
7.4.2	Piège de Penning	85
7.4.3	Piège de Paul	86
7.5	Limites de la description newtonienne : accélérateurs de particules	87
8	Mouvement dans un champ de force central	89
8.1	Propriétés des forces centrales	89
8.1.1	Définition	89
8.1.2	Moment d'une force centrale, conséquences	89
8.2	Forces centrales conservatives	90
8.2.1	Conservation de l'énergie, énergie potentielle effective	90
8.2.2	Diagramme d'énergie, trajectoires	91
8.3	Forces centrales newtonienne	92
8.3.1	Définition	92
8.3.2	Diagramme énergétique	92
8.4	Mouvements d'un point matériel dans un champ de force central newtonien	93
8.4.1	Différents mouvements possibles	93
8.4.2	Cas simple de la trajectoire circulaire	94
8.4.3	Cas réaliste des trajectoires elliptiques	95
8.5	Lois de Kepler	96
8.6	Étude des états de diffusion	96
8.7	Ouverture : Généralisation au problème à deux corps	97
8.8	Exercices complémentaires	98
9	Changement de référentiels	101
9.1	Changements de référentiel	101
9.1.1	Situation d'étude	101
9.1.2	Formule de dérivation vectorielle	102
9.1.3	Cinématique – Transformations des vecteurs vitesse et accélération	103
9.1.4	Deux cas particuliers incontournables	104
9.2	Dynamique en référentiel non-galiléen	105
9.2.1	Principe fondamental de la dynamique, pseudo-forces	105
9.2.2	Théorème du moment cinétique	106
9.2.3	Théorème de l'énergie cinétique	106
9.2.4	Transformation de Galilée	107
9.3	Quelques référentiels usuels	107
9.4	Conséquences du mouvement de la Terre autour du soleil	110
9.4.1	PFD dans le référentiel géocentrique	110
9.4.2	Forces de marée dues à un astre	111
9.4.3	Théorie statique des marées océaniques	113
9.4.4	Galiléen ou non ?	116
9.5	Conséquences de la rotation de la Terre sur elle-même	117
9.5.1	Principe fondamental dans \mathcal{R}_G	117
9.5.2	Terme inertiel, pesanteur	118
9.5.3	Quelques effets classiques du terme de Coriolis	119

9.6	Ouverture n°1 : Quelques éléments de relativité restreinte	122
9.7	Ouverture n°2 : le référentiel barycentrique	123
9.7.1	Théorèmes de König	123
9.7.2	Lois de la dynamique dans le référentiel barycentrique	125
9.8	Exercices complémentaires	127

Chapitre 1

Cinématique du point et des solides

1.1 Cadre de l'étude menée

Modèle du point matériel La mécanique du point se base sur le modèle du point matériel. Celui-ci consiste à considérer qu'un corps peut être représenté par un unique point M (situé en son centre de masse, ou centre d'inertie¹), lequel est affecté de toute la masse m du système.

Ce modèle présente bien sûr des limites : on ne pourra ainsi pas considérer la rotation propre d'un point matériel, alors que celle-ci peut avoir un effet notable sur la dynamique du corps (voir par exemple l'effet Magnus en mécanique des fluides).

Limites La mécanique classique est historiquement une des première branche de la physique moderne. En tant que telle, elle est limitée par différents aspects :

- elle ne s'intéresse qu'à des mouvements dont les vitesses typiques sont très inférieures à la vitesse de la lumière $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Lorsque cette contrainte est levée, on entre dans le cadre de la *relativité*.
- elle ne considère pas d'effets quantiques, c'est-à-dire qu'elle est parfaitement déterministe : connaissant la position et la vitesse d'un point à un instant donné, et son équation du mouvement, on peut en théorie décrire toutes ses positions passées et futures.

Cette valeur de c permet de définir l'unité MÈTRE : le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant $1/299792458$ s.

Remarque

En réalité la vitesse de la lumière vaut $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est une valeur exacte, qui ne souffre aucune incertitude puisqu'elle a été fixée comme référence par le bureau international des poids et mesures (BIPM). Faire l'arrondi à $3 \cdot 10^8$ engendre une erreur de moins de 0,1 % tout à fait acceptable dans la plupart des applications numériques qui nous concerneront.

Remarque

Encore faut-il avoir défini l'unité SECONDE, ce que nous faisons immédiatement après. Noter bien que la définition de la seconde ne dépend pas de celle du mètre.

1.2 Référentiel, repère, coordonnées

1.2.1 Espace et temps en mécanique classique

La précédente définition du mètre permet de définir des longueurs dans l'espace sans ambiguïté.

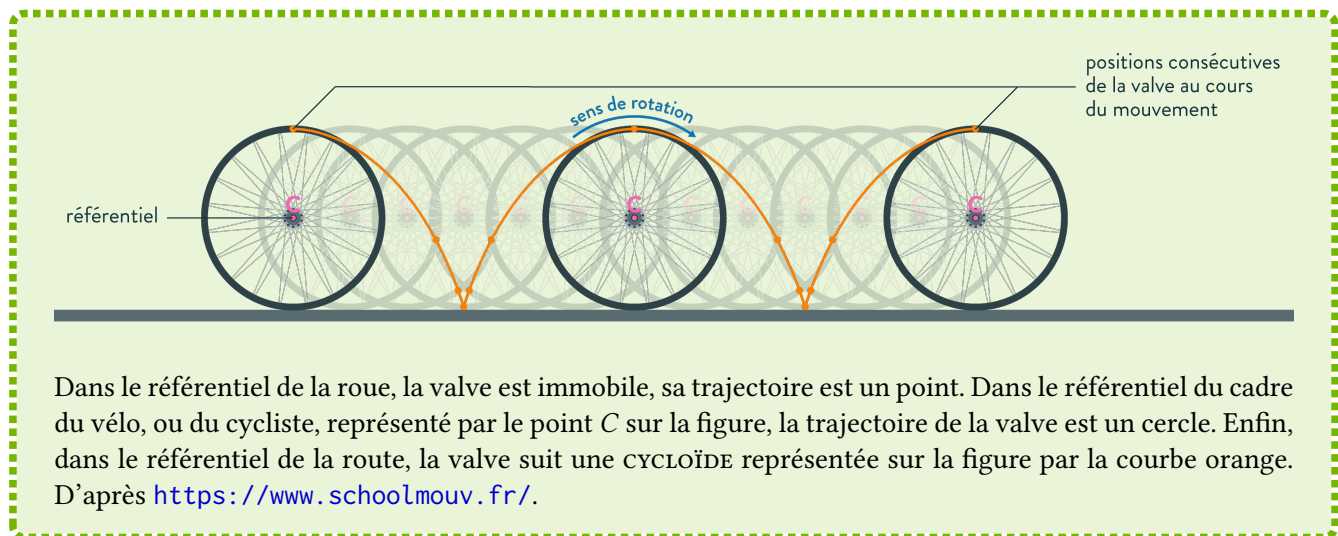
1. On verra que les deux coïncident lorsque le champ de pesanteur est uniforme

La question du temps, elle, est plus fine, nous en reparlerons plus longuement en toute fin de cours dans l'introduction à la relativité. Disons simplement, pour le moment, qu'en mécanique classique le temps est absolu : c'est un paramètre de description de l'évolution des systèmes qui ne dépend pas de l'état de mouvement du référentiel choisi. On le mesure en SECONDE : la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133, toujours d'après le BIPM.

1.2.2 Référentiel

Un RÉFÉRENTIEL est un ensemble continu d'observateurs immobiles les un par rapport aux autres, munis d'horloges synchronisées, qui peuvent s'accorder sur l'état de mouvement des points par rapport à eux. Ainsi, dans le référentiel terrestre, des êtres humains immobiles les uns par rapport aux autres (ou autrement dit tous par rapport à la Terre), et s'étant préalablement accordé sur une description commune du temps, décriront identiquement le mouvement d'une voiture, d'un avion, d'un éléphant qui court.

Il est primordial de noter que le mouvement d'un point M dépend du référentiel dans lequel on l'observe : les quantités cinématiques (et dynamiques) sont relatives. Prenons par exemple le mouvement d'une valve de roue de vélo dans le référentiel de la route, du cycliste ou de la roue elle-même :



Il y a quelques référentiels d'usage courant à connaître : référentiel du laboratoire, référentiel géocentrique, référentiel de Copernic, etc. Dans un premier temps seul le référentiel du laboratoire nous intéresse, mais nous reviendrons en détail sur cette zoologie au dernier chapitre lorsque nous interrogerons le caractère galiléen ou non. D'ici là, ils le sont tous par hypothèse.

1.2.3 Repère et coordonnées

Une fois qu'on s'est donné un référentiel, il s'agit de décider comment on va repérer les coordonnées du point, c'est-à-dire de quelle manière on va décomposer le VECTEUR POSITION \vec{OM} , O étant l'origine du repère. Afin d'atteindre n'importe quel point de l'espace il nous faut trois vecteurs non colinéaires. Par souci d'efficacité² on les prendra systématiquement *orthogonaux* et orientés *dans le sens direct* par la règle de la main droite. Par convention les vecteurs de base sont pris *unitaire*, c'est-à-dire de norme 1.

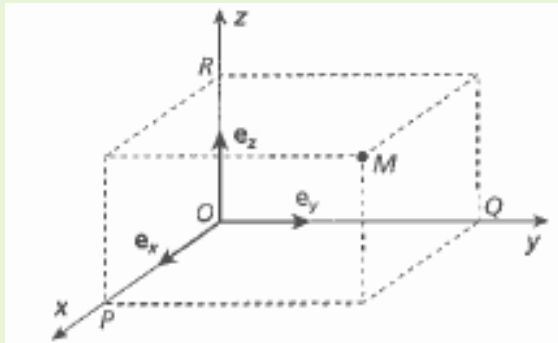
Divers choix sont possibles mais il faut impérativement connaître les quatre suivants. Deux valeurs successives du vecteurs \vec{OM} diffèrent d'un vecteur infinitésimal nommé VECTEUR DÉPLACEMENT et noté $d\vec{OM}$ dont il peut être utile de connaître l'expression dans chaque système de coordonnées.

2. Cela permettra notamment d'exprimer les opérations vectorielles sans trop de tracas.

Remarque

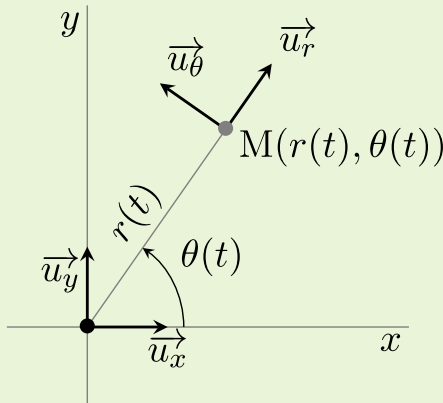
Les vecteurs unitaires sont adimensionnés de sorte que chaque coordonnées d'un vecteur doit avoir la dimension du vecteur en question. Les coordonnées du vecteur position sont homogènes à une longueur, celles du vecteur vitesse à une vitesse, etc.

Le repère cartésien est un repère orthonormé direct formé de trois vecteur unitaires \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_z par rapport auxquels on relève les coordonnées x , y , z .



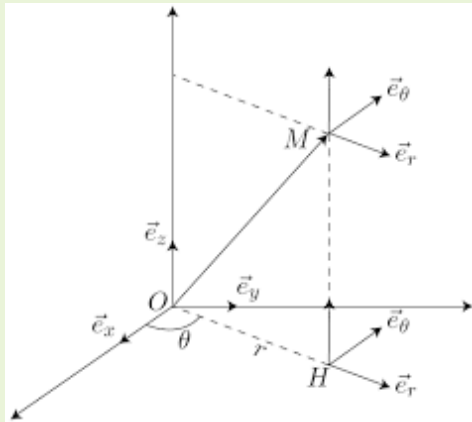
On a $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Les vecteurs de base \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z sont fixes dans le référentiel lié. Dans ce référentiel le vecteur déplacement s'exprime simplement $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$.

Le repère polaire est un repère à deux dimensions permettant de repérer un point par sa distance à l'origine r et l'angle θ avec un axe privilégié du repère. C'est l'équivalent du plan complexe.



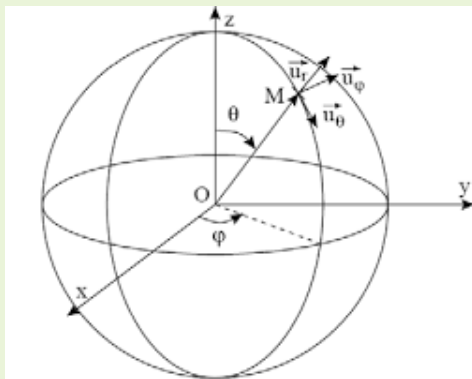
r est une longueur et θ un angle en rad. Ici on exprime simplement $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, mais les vecteurs de base \vec{u}_r et \vec{u}_θ varient avec le mouvement du point M ! Cela aura des conséquences que nous explorerons bientôt sur les dérivées temporelles. On peut aussi exprimer le vecteur déplacement, par exemple à l'aide d'un raisonnement graphique, $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta$.

Le repère cylindrique est le repère polaire auquel on ajoute une direction cartésienne « verticale ». À $r = OH$, la distance entre l'origine et le projeté de M sur (xOy) et θ angle orienté entre (Ox) et \overrightarrow{OH} on adjoint z , altitude du point M . On y associe les vecteurs de base \vec{e}_r radial, \vec{e}_θ orthoradial et \vec{e}_z vertical.



On a simplement $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$. Les vecteurs de base \vec{u}_r et \vec{u}_θ varient encore avec le point M mais \vec{u}_z , lui, est un vecteur fixe. En prolongeant le raisonnement effectué pour le repère polaire on déduit immédiatement $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$.

Le repère sphérique est constitué d'une distance r et deux angles φ et θ . Les vecteurs de base sont \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ . Attention cependant, le φ des coordonnées sphériques est le θ des coordonnées cylindriques!



Les deux angles sont communément appelé, en référence à leur utilité sur la Terre, latitude (φ) et longitude (θ). Les trois vecteurs de base sont en mouvement avec M . On voit aussi souvent ce repère avec ψ au lieu de θ .

Il est commun d'utiliser ce repère soit pour les mouvement à la surface d'une sphère, soit pour les mouvements complètement libre, dont on ne sait rien a priori.

On a enfin $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ et, en travaillant un peu les méthodes précédentes, $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$.

Remarque

Attention à ne pas confondre la notion de *référentiel* et celle de *repère*. Le référentiel est un objet abstrait ou concret qu'on considère immobile (« dans son référentiel ») et par rapport auquel on décrit les mouvements. Par exemple quand on décrit une expérience de table on considère que la Terre ne bouge pas et on décrit les mouvement par rapport à elle, « au sol ». Si on étudie le mouvement d'un satellite, comme la lune, il ne serait pas judicieux de considérer la Terre immobile mais sous certaines réserves on peut prendre pour référence le soleil et négliger son propre mouvement, etc.

Le choix du repère est un choix *technique*, un choix *d'outils* pour décrire le mouvement. Le choix du repère n'est pas influencé par le choix du référentiel : dans le référentiel du laboratoire on peut choisir de placer un repère cartésien si le mouvement est, par exemple, vertical, ou bien un repère polaire si c'est un mouvement circulaire qui sera plus simplement décrit par l'angle θ .

L'un et l'autre et choix sont une question de confort et se font (ou se feront, à la fin de ce TD-cours) assez naturellement.

1.3 Description du mouvement d'un point matériel

1.3.1 Objets de la description du mouvement

La TRAJECTOIRE d'un point matériel est la donnée des fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (resp. $r(t)$, $\theta(t)$, etc.) qui donnent l'évolution des coordonnées au cours du temps. Ceci donne une description paramétrique du mouvement du point. En terme plus direct, c'est la donnée du vecteur position en tout instant :

Vecteur position Dans un référentiel donné, avec un point fixe O , le VECTEUR POSITION du point M est simplement le vecteur \overrightarrow{OM} . On le note également \vec{r} quand il n'y a pas d'ambiguïté. Lorsque le déplacement obéit à des contraintes connues, on choisit les vecteurs de bases du repère pour que le vecteur position s'exprime simplement.

Vecteur vitesse Le VECTEUR VITESSE (instantanée) d'un point matériel est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. Il traduit un changement instantané de la position de l'objet :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}. \quad (1.1)$$

Il faut rapprocher cette notion de l'idée de vitesse (moyenne) : la vitesse moyenne d'un point entre deux instants t et $t + \Delta t$ vaut en effet $\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$. La vitesse instantanée correspond donc logiquement au cas limite $\Delta t \rightarrow 0$. C'est la définition d'une dérivée. Par construction, *le vecteur vitesse est donc tangent à la trajectoire*. Rappelons que dans le système international la vitesse s'exprime en mètres par seconde ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) et non en kilomètre par heure ($\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

On peut se souvenir que $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ correspond à $3600 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$ soit $3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Autrement dit, on passe des $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ aux $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en multipliant par 3,6 et réciproquement en divisant par 3,6.

Vecteur accélération Le VECTEUR ACCÉLÉRATION (instantanée) d'un point matériel est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, soit la dérivée seconde du vecteur position. Il traduit un changement instantané de la vitesse de l'objet et s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}. \quad (1.2)$$

Le vecteur accélération est important en physique puisqu'il est directement lié aux actions des forces.

Remarque

Dans le langage courant, on a tendance à parler d'accélération lorsque la vitesse augmente et de freinage lorsqu'elle diminue. En physique toutes les variations du vecteur vitesse (pas seulement en norme, aussi en direction et en sens) sont décrits par le vecteur accélération \vec{a} dont une coordonnée sera positive ou négative selon que la vitesse augmente ou diminue selon cet axe.

Attention !

La vitesse et l'accélération sont des *vecteurs*. Leur norme renseigne, comme c'est le cas dans le langage commun, sur l'intensité des variations de position et vitesse respectivement mais leur direction et sens sont tout aussi intéressants. En particulier, un mouvement peut se faire sans que la norme du vecteur vitesse varie, mais pour autant en accélérant si le sens du vecteur vitesse change. C'est le cas par exemple du mouvement circulaire uniforme.

Exercice n°1 : Vitesse et accélération le long d'une trajectoire

Soit un point mobile M dont la trajectoire dans un repère fixe orthonormé $(Oxyz)$ est paramétrisée par :

$$x(t) = 4t^2, \quad y(t) = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right), \quad z(t) = 3t + t^3.$$

1. Déterminer le vecteur vitesse et sa norme.
2. Déterminer le vecteur accélération et sa norme.

Correction n°1 : Vitesse et accélération le long d'une trajectoire

1. Le repère étant fixe, on calcule la vitesse par dérivation des coordonnées :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4 \times 2t \\ 4\left(1 - \frac{3t^2}{3}\right) \\ 3 + 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t \\ 4(1 - t^2) \\ 3(1 + t^2) \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la norme est immédiat : $\|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 64t^2 + 16(1 + t^4 - 2t^2) + 9(1 + 2t^2 + t^4) = 25t^4 + 50t^2 + 25 = 25(1 + t^2)^2$, d'où

$$\|\vec{v}\| = 5(1 + t^2).$$

2. Aussi, pour l'accélération,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8t \\ 6t \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \|a\|^2 = 64 + 64t^2 + 36t^2 = 64 + 100t^2.$$

Exercice n°2 : Ralentissement sur un cercle

Une particule se déplace sur un cercle de rayon R , à la vitesse angulaire ω_0 constante. À la date $t = 0$, elle ralentit avec une accélération angulaire constante égale à $-\alpha_0 < 0$.

1. Au bout de combien de temps la particule s'arrête-t-elle ? Vérifier l'homogénéité du résultat.
2. Quelle distance a-t-elle alors parcouru ?

Correction n°2 : Ralentissement sur un cercle

1. L'accélération angulaire se traduit mathématiquement par $\ddot{\theta} = -\alpha_0$ qui s'intègre en $\dot{\theta} = -\alpha_0 t + \text{cste}$. La condition limite $\dot{\theta}(t = 0) = \omega_0$ implique que $\text{cste} = \omega_0$ et $\dot{\theta} = \omega_0 - \alpha_0 t$. La particule s'arrête quand $\dot{\theta} = 0$ soit au bout d'un temps $t_0 = \omega_0 / \alpha_0$.

ω_0 est une vitesse angulaire homogène à T^{-1} et α_0 une accélération angulaire homogène à T^{-2} donc le rapport des deux est bien un temps.

2. Une nouvelle intégration, avec $\theta(0) = 0$, donne

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\alpha_0 t^2 + \omega_0 t.$$

On a donc

$$\theta(t_0) = -\frac{1}{2}\alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2} + \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha_0} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_0}.$$

C'est l'angle parcouru pendant le mouvement. La trajectoire étant circulaire, la distance parcourue vaut $L = R \times \omega_0^2 / 2\alpha_0$.

1.3.2 Expressions dans les divers systèmes de coordonnées

L'expression de \vec{v} et \vec{a} se déduit donc directement de celle de \overrightarrow{OM} par dérivation. En coordonnées cartésiennes le calcul est immédiat puisque les vecteurs de base sont fixes :

$$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d\vec{u}_y}{dt} = \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$$

d'où

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + x\frac{d\vec{u}_x}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + y\frac{d\vec{u}_y}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + z\frac{d\vec{u}_z}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z.$$

Dans les autres systèmes de coordonnées c'est un peu plus compliqué et il faut dériver les vecteurs de base, qui varient aussi au cours du temps. Faisons le calcul une fois, à la main, pour voir :

Pour dériver le vecteur \overrightarrow{OM} il faut se débarrasser des vecteurs mobiles en les projetant dans la base fixe. On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = r\cos(\theta)\vec{u}_x + r\sin(\theta)\vec{u}_y$$

en dérivant terme à terme il vient :

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} &= \frac{dr}{dt}\cos\theta\vec{u}_x + r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)\vec{u}_x + r\cos(\theta)\frac{d\vec{u}_x}{dt} + \frac{dr}{dt}\sin\theta\vec{u}_y + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\vec{u}_y + r\sin(\theta)\frac{d\vec{u}_y}{dt} \\ &= \underbrace{\dot{r}(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)}_{\vec{u}_r} + \underbrace{r\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y)}_{\vec{u}_\theta} \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.\end{aligned}$$

C'est la méthode pédestre et pénible pour faire ce genre de calcul. En fait, on peut calculer une fois pour toutes $d\vec{u}_r/dt$ et $d\vec{u}_\theta/dt$ à partir de leur projection sur la base fixe et en retenant

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r}. \quad (1.3)$$

On peut ainsi obtenir vitesse et accélération de manière beaucoup plus efficace !

En effet,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r \\ \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} &= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,\end{aligned}$$

on retrouve l'expression calculée précédemment.

On pourra finalement s'entraîner à redémontrer en exercice, puis retenir, les expressions du tableau suivant.

	CARTÉSIENNES	CYLINDRIQUES	SPHÉRIQUES
\overrightarrow{OM}	$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$	$r\vec{e}_r$
$d\overrightarrow{OM}$	$dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$	$dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$	$dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$
\vec{v}	$\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
\vec{a}	$\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$	trop compliqué !

Remarque

Illustrons l'encart « attention ! » précédent. Pour le mouvement circulaire r ne varie pas et on a $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Cette formule est connue. On vient de calculer aussi que $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.

Si de plus le mouvement est uniforme, c'est-à-dire que la norme de la vitesse est constante, alors $r\dot{\theta}$ est constante, donc $\dot{\theta}$ est constant. On peut simplifier $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$. L'accélération est alors orthogonale à la vitesse et centripète, mais en aucune cas le vecteur \vec{a} est-il nul ! On commence d'ailleurs à sentir les prémices de la « force centrifuge ». Celle-ci interviendra dans le chapitre 9 sur les changements de référentiel lorsqu'on cherchera à décrire le mouvement du point de vue d'un référentiel en rotation. Ici, on est toujours en train de décrire le mouvement depuis un référentiel galiléen.

Exercice n°3 : Accélération d'un pilote de chasse

Sachant qu'un pilote de chasse ne peut pas supporter une accélération de plus de $10g$ (10 fois l'accélération de la pesanteur), estimer la place qu'il lui faut pour effectuer un demi-tour lorsque sa vitesse vaut $v_0 = 2500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Correction n°3 : Accélération d'un pilote de chasse

Supposons que le pilote effectue son demi-tour sur un arc de cercle de sorte qu'en coordonnées cylindriques $\dot{r} = 0$ et $\dot{z} = 0$. Si de plus il le fait à vitesse angulaire constante, $\ddot{\theta} = 0$. Ses vitesse et accélération valent, avec R le rayon de l'arc de cercle,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r.$$

On veut donc que

$$\frac{v^2}{R} < 10g \implies R > \frac{v^2}{10g} = 4,9 \text{ km}.$$

Exercice n°4 : Automobiliste dans un parking en colimaçon

On considère un parking dont la rampe d'accès est en colimaçon (rampe hélicoïdale). Un automobiliste la remonte avec une vitesse constante $v_0 = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Déterminer la norme de son accélération.

Paramètres : rayon de l'hélice décrite par l'automobiliste $R = 20 \text{ m}$. Pas de l'hélice (= hauteur entre deux niveaux du parking) $h = 3 \text{ m}$.

Correction n°4 : Automobiliste dans un escalier en colimaçon

Dans un repère cylindrique, sans variation de rayon et avec une vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ constante, l'accélération s'écrit $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}\vec{u}_z$. La vitesse étant constante on va avoir $\ddot{z} = 0$ mais $\dot{z} \neq 0$ de sorte qu'on n'a plus $v_0 = R\dot{\theta}$ et donc plus de lien immédiat entre vitesse et accélération comme dans l'exercice précédent.

Comment obtenir \dot{z} ? On sait que pour remonter un pas d'hélice h , le conducteur doit parcourir un cercle de rayon R à la vitesse v_0 . Il met donc un temps $2\pi R/v_0$, ce qui donne comme vitesse verticale

$$\dot{z} = \frac{h}{2\pi R/v_0} = \frac{h v_0}{2\pi R}.$$

On en déduit $\dot{\theta}$ car $v_0^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 : \dot{\theta}^2 = (v_0^2 - \dot{z}^2)/R^2$. Et enfin l'accélération :

$$a_0 = \|\vec{a}\| = R\dot{\theta}^2 = R \frac{v_0^2 - \dot{z}^2}{R^2} = \frac{v_0^2 \left(1 - \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}\right)}{R} \approx 0,39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

1.4 Mouvement d'un solide

1.4.1 Définition

La limite du point matériel est bien sûr arbitraire. En réalité, tout corps possède une extension spatiale, et il peut être nécessaire de prendre celle-ci en compte pour expliquer certains mouvements particuliers, notamment les rotations du système sur lui-même.

Cantonons-nous ici au modèle du solide indéformable, qui correspond au cas où les distances entre les points du solide sont invariantes au cours du temps :

$$\forall M_1, M_2 \in S, \forall t, t' : \|\overrightarrow{M_1 M_2}(t)\| = \|\overrightarrow{M_1 M_2}(t')\| \quad (1.4)$$

1.4.2 Translation

Un solide est animé d'un mouvement de translation lorsqu'un vecteur constitué de deux points du solide reste égal à lui-même au cours du temps. Autrement dit, si A_1 et B_1 sont deux points du solide (repérés dans le référentiel du laboratoire) à l'instant t_1 qui se retrouvent en A_2 et B_2 à l'instant t_2 , on doit avoir $\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{A_2 B_2}$ pour parler d'un mouvement de translation.

Cette définition impose que le mouvement de la terre autour du soleil est (au premier ordre) un mouvement de translation, mais que celui d'un enfant sur une balançoire n'en est pas un !

1.4.3 Rotation autour d'un axe fixe

On dit qu'un solide est en rotation autour d'un axe fixe s'il existe un axe de rotation Δ immobile dans le référentiel du laboratoire.

Dès lors, soit M un point du solide et H son projeté orthogonal sur l'axe de rotation Δ . On note $R = HM$. Dans un repère polaire local, on a $\overrightarrow{HM} = R\vec{e}_r$ et donc $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Cette dernière vitesse a du sens car l'axe de rotation est fixe dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, donc on calcule bien la vitesse par rapport à un point fixe.

Voir par exemple le mouvement d'une grande roue <https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/60-translation-circulaire>. L'armature de la roue est en rotation par rapport au centre contrairement aux nacelles qui ont un mouvement de translation circulaire. On s'en convainc en suivant la trajectoire d'un vecteur au cours du temps.

La translation circulaire engendre des trajectoires qui sont des cercles de même rayon mais de centres différents. Au contraire, la rotation engendre des trajectoires qui sont des cercles tous centrés sur le même point mais de rayons différents.

Attention !

Dans la suite on distingue les SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS constitués d'un ensemble fini ou dénombrable de points matériel (on peut les compter, et sommer leur propriétés de manière discrète : $\sum_i m_i$, etc.) des SOLIDES qui sont des objets continus et constitués d'une quantité indénombrable de points matériels. L'intégration (somme continue) est alors de rigueur.

1.5 Exercices complémentaires

Ces deux exercices nécessitent de connaître les équations du mouvement d'une chute libre (voir chapitre 2).

Exercice n°5 : Chute d'un pot de fleur

De votre fenêtre, vous apercevez un pot de fleur qui tombe. Vous estimez qu'il met $1/10$ de seconde pour passer devant la fenêtre haute de $1,40$ m. Quelle vitesse possède le pot de fleur en bas de la fenêtre ? De quel étage est-il tombé ? Idem si le temps est de $5/100$ de seconde.

N.B. : le pot tombe sans vitesse initiale, et on peut supposer que vous habitez au rez-de-chaussée.

Correction n°5 : Chute d'un pot de fleur

On considère que le bas de la fenêtre est l'altitude 0. Soit H la hauteur dont est tombé le pot de fleur, sans vitesse initiale. Soit h la hauteur de la fenêtre. L'équation horaire est $z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$.

Soit t_1 l'instant où le pot de fleur passe en haut de la fenêtre, t_2 celui où il arrive en bas. On a $t_2 - t_1 = \Delta t = 0,1$ s. Par ailleurs

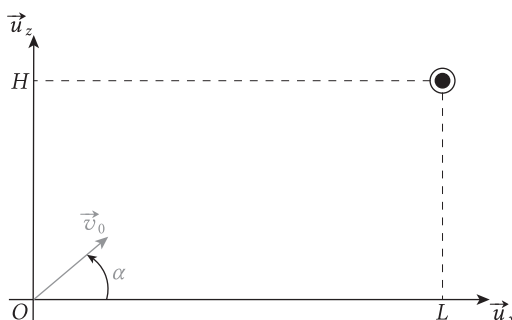
$$H - 1/2gt_1^2 = 0 \quad H - 1/2gt_2^2 = h \Rightarrow 1/2g(t_2^2 - t_1^2) = h = 1/2g\Delta t(t_1 + t_2)$$

On a donc deux équations à deux inconnues t_1 et t_2 . La résolution donne $t_1 = 1,38$ s, $t_2 = 1,48$ s.

On obtient ensuite $H = 1/2gt_2^2 \approx 10,7$ m. En considérant des étages de 3 m il a été lâché du troisième étage.

Exercice n°6 : Rendez-vous d'un projectile et d'une cible en mouvement

Une cible C est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur H . Au même moment, un projectile P est tiré avec une vitesse initiale v_0 depuis une distance au sol L (voir schéma).



- Déterminer les équations horaires du mouvement du projectile et de celui de la cible.
- Quel doit être l'angle de tir α pour que le projectile atteigne la cible en $x = L$?
- À quelle condition sur v_0 cela est-il possible ?

A.N. : $H = 10$ m et $L = 150$ m.

Correction n°6 : Rendez-vous d'un projectile et d'une cible en mouvement

1. Par application du PFD dans le référentiel du sol, galiléen, et double intégratio (voir le chapitre de dyna-

mique), l'équation horaire de la cible est	$z_C = H - \frac{1}{2}gt^2$	et celle du projectile est	$z_P = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha$
	$x_C = L$		$x_P = v_0 t \cos \alpha$

2. On réécrit l'équation du projectile en éliminant t ce qui donne

$$z_P(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x.$$

Lorsqu'il parvient en $x = L$, où il doit rencontrer la cible, il est donc à l'altitude atteinte $-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} L^2 + L \tan \alpha$.

Ceci arrive d'ailleurs au temps $t_0 = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$.

Pendant ce temps, la cible, dans sa chute, a atteint l'altitude $z_C = H - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$.

On veut que $z_C = z_P$ pour qu'il y ait collision, ce qui donne après simplification $L \tan \alpha = H$.

3. On veut que $t_0 < t_{\text{chute}} = \sqrt{2H/g}$ pour que la collision ait lieu avant que la cible ne touche le sol. Ceci donne

$$\frac{L}{v_0 \cos \alpha} < \sqrt{2H/g} \Rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{L}{\cos \alpha}.$$

A.N. : $\alpha = 3,9^\circ$ et $v_0 > 105 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Chapitre 2

Dynamique du point et prolongement aux systèmes de points

La description du mouvement est un point de départ important et ne doit pas être négligée : une situation que l'on est capable de décrire est une situation déjà quasiment comprise ! Mais bien sûr cette étape ne suffit pas. On veut être capable de faire le lien entre le mouvement futur du point M et les actions qui s'exercent sur lui.

2.1 Objets de la dynamique, lois de Newton

2.1.1 Quantité de mouvement

L'expérience commune montre que pour changer l'état de mouvement d'un corps, il y a deux paramètres à prendre en compte¹ :

- la vitesse du corps : il est plus difficile d'arrêter un corps qui va vite qu'un corps qui va lentement, et réciproquement il est plus simple de conférer une petite vitesse à un corps que de le faire avancer très rapidement.
- la masse du corps : faire bouger une machine à laver est plus difficile que déplacer une feuille de papier.

Conscients de ces observations, nous définissons le vecteur QUANTITÉ DE MOUVEMENT d'un point matériel comme le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\boxed{\vec{p}(M) = m \vec{v}(M)}. \quad (2.1)$$

La quantité de mouvement est donc homogène à $M \times LT^{-1}$, et s'exprime dans le SI en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Que vaut alors la quantité de mouvement d'un système de points matériels Σ ?

$$\begin{aligned} \vec{p}_\Sigma &= \sum_{i \in \Sigma} \vec{p}_i = \sum_{i \in \Sigma} m_i \vec{v}_i = \sum_{i \in \Sigma} m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}, \\ \text{or } G \text{ centre d'inertie} &\Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i \in \Sigma} \vec{OM}_i \quad \text{avec} \quad m = \sum_i m_i \\ \text{i.e. } \frac{d\vec{OG}}{dt} &= \frac{1}{m} \sum_{i \in \Sigma} m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \vec{p}_\Sigma = m \vec{v}_G. \end{aligned}$$

1. Ces considérations s'entendent bien sûr sans frottements.

On voit donc que la quantité de mouvement d'un système de points matériels est celle d'un point matériel fictif de masse $M = \sum m_i$ situé au centre de gravité (d'inertie) du système. Ceci permet de justifier l'utilité du modèle du point matériel du point de vue de la dynamique.

Remarque

En toute rigueur il faut distinguer le CENTRE D'INERTIE OU CENTRE DE MASSE du CENTRE DE GRAVITÉ. Le premier est le barycentre des masses du système tandis que le second est le point où s'applique la force de gravité. Dans un champ de pesanteur uniforme (ce qui sera quasiment toujours le cas) les deux points sont confondus.

2.1.2 Bilan des forces

Pour anticiper le mouvement d'un point matériel M il faut commencer par dresser la liste des actions exercées sur le corps. Elles sont modélisées par la notion de force. Une FORCE est un vecteur et est donc caractérisée par son point d'application, sa direction, son sens et sa norme. Celle-ci s'exprime en Newton, N, homogène à MLT^{-2} .

Idéalement on veut pouvoir connaître pour chaque action ces quatre caractéristiques mais nous allons voir que ce n'est pas toujours simple. Une fois la liste des actions dressée, on fait le lien avec le mouvement grâce aux trois lois de Newton.

2.1.3 Première loi de Newton : principe d'inertie

La PREMIÈRE LOI DE NEWTON, également appelée PRINCIPE D'INERTIE, stipule que :

« Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système pseudo-isolé est constante. »

Un SYSTÈME PSEUDO-ISOLÉ est un système sur lequel s'exercent des forces dont la résultante est nulle : $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Bien entendu, un SYSTÈME ISOLÉ, sur lequel ne s'exercent pas de force du tout, est un système pseudo-isolé.

Remarque

1. La question du référentiel galiléen est épistémologiquement compliquée. En effet, un référentiel galiléen est un référentiel où le principe d'inertie est vérifié... L'astuce habituelle (qui ne résout pas vraiment le problème) consiste à postuler l'existence d'un référentiel galiléen. Dès lors, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à celui-ci est également galiléen. Nous aurons l'occasion d'en discuter au tout dernier chapitre.
2. Il convient également de noter l'importance historique du principe d'inertie. Jusqu'à Newton, la physique bâtie par les grecs supposait qu'un corps sur lequel aucune force ne s'applique est nécessairement au repos. En réalité, Newton nous explique qu'il peut également être en mouvement à vitesse constante.

2.1.4 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)

La seconde loi de Newton, aussi appelée PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE, et que l'on abrègera quasiment systématiquement « PFD » stipule que :

« Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces s'exerçant sur ce système. » Autrement dit,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (2.2)$$

Si le système étudié est fermé, donc de masse constante, on a $d\vec{p}/dt = dm\vec{v}/dt = m d\vec{v}/dt$ donc on peut écrire le PFD sous sa forme plus connue (et qu'on retiendra) :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} . \quad (2.3)$$

Remarque

Lorsqu'on appliquera le pfd (très souvent!) on prendra bien soin de *systématiquement*

- vérifier et notifier qu'on travaille dans un référentiel galiléen (cela aura son importance au chapitre 9),
- expliciter le système *fermé* auquel on applique le principe,
- dresser un bilan des forces exhaustif.

2.1.5 Troisième loi de Newton : loi des actions réciproques

La troisième loi de Newton, dite aussi PRINCIPE DES ACTIONS RÉCIPROQUES, énonce que :

« Lorsque deux points matériels sont en interaction mutuelle, les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre sont de même norme et direction, mais de sens opposés. »



Force de 1 sur 2 et de 2 sur 1.

2.2 Mise en applications avec quelques forces classiques

2.2.1 Force d'attraction gravitationnelle, poids

En se basant sur les travaux de Kepler (qui base ses trois lois, dont nous discuterons au chapitre 8, sur les observations de Tycho Brahe), Newton formule dans les *Principia* (1687) la loi de l'attraction universelle, ou loi de la gravitation.

Entre deux corps (supposés ponctuels ici²) A et B de masses m_A et m_B s'exerce une force d'attraction gravitationnelle. La force de B sur A a pour direction la ligne joignant les centres de masse des deux corps, elle est attractive et a pour expression :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \mathcal{G} \frac{m_A m_B}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{u}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r .$$

La constante de gravitation vaut $\mathcal{G} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

On peut aussi écrire cette force en faisant intervenir le CHAMP GRAVITATIONNEL $\vec{G}(B)$:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = m_B \times \vec{G}(B) \quad \text{avec} \quad \vec{G}(B) = -\mathcal{G} \frac{m_B}{r^2} \vec{u}_r .$$

Sur Terre, on peut se contenter d'une expression plus simple :

2. ou a minima à distribution sphérique de masse.

En effet, les altitudes considérées h sont toujours bien plus faibles que le rayon de la Terre $R_T = 6371$ km, on peut donc faire l'approximation $h \ll R_T$. Avec aussi la masse $M_T = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg de la Terre,

$$\|\vec{G}_{\text{Terre}}(M)\| = \mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \approx \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (2.4)$$

L'attraction gravitationnelle au voisinage de la Terre est appelée **POIDS** (on raffinerait un peu cette notion au chapitre 9), elle est toujours verticale et dirigée vers le bas, de norme $\vec{P} = m \vec{g}$ avec :

$$\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_z.$$

Remarque

Lorsqu'on approxime g à $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ on fait une erreur de quelques 2 % qui peut parfois expliquer des différences entre prédiction théorique et observation expérimentale en TP !

Exercice n°7 : Étude d'un lancé au voisinage de la Terre

On va considérer plusieurs mouvements d'un point matériel M de masse m au voisinage de la terre. Dans tout cet exercice les frottements sont négligés et on travaille dans un référentiel \mathcal{R} lié au sol et supposé galiléen.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour obtenir l'équation du mouvement.
2. Dans un premier temps on suppose que M est lâché d'une hauteur h au dessus du sol sans vitesse initiale. Quelle est la durée de la chute libre ? Faire l'application numérique pour une chute libre de 1,5 m.

Application à la balistique On change de description et on considère un projectile lancé depuis le niveau du sol $z = 0$. Il est lancé avec une vitesse initiale \vec{v}_0 de norme v_0 et faisant avec l'horizontale un angle α . Le mouvement a lieu dans le plan (O, x, z) .

3. Déterminer l'équation horaire du mouvement $(x(t), z(t))$ puis l'équation paramétrique $z(x)$. Quelle courbe le projectile dessine-t-il ?
4. Calculer la **FLÈCHE** de la trajectoire, c'est à dire l'altitude H du plus haut point atteint. Commenter la dépendance de H avec α .
5. Calculer la **PORTÉE** de la trajectoire, c'est à dire la distance x_p totale parcourue par le projectile au niveau du sol. Commenter la dépendance de x_p avec α .
6. Représenter graphiquement quelques trajectoires du projectile en fonction de l'angle de visée α .

Correction n°7 : Étude d'un lancé au voisinage de la Terre

1. On travaille dans un repère cartésien de vertical \vec{e}_z ascendante. On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel M de masse m dans le référentiel du sol supposé galiléen. La seule force qui s'exerce est le poids de sorte que

$$m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g \vec{u}_z}. \quad (2.5)$$

2. Avant d'intégrer l'équation du mouvement on traduit les hypothèses de cette question sur les conditions initiales : $x(0) = y(0) = 0$ et $z(0) = h$. Aussi, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. On intègre alors l'équation :

$$\vec{v}(t) = -gt \vec{u}_z + \vec{cste} \quad \text{et} \quad v(0) = 0 \Rightarrow \text{cste} = 0.$$

puis à nouveau :

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Le mobile touche le sol lorsque $z(t_0) = 0$ soit en $t_0 = \sqrt{2h/g}$. Avec $h = 1,5$ m et $g = 9,81$ m · s⁻² on trouve un temps de chute de $t_0 = 0,55$ s.

Application à la balistique 3. À nouveau traduisons les hypothèses de la question sur les conditions initiales. On commence par exclure tout mouvement selon y . De plus, $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$. Enfin, $\dot{x}(0) = \vec{v}_0 \cdot \vec{u}_x = v_0 \cos \alpha$ et $\dot{z}(0) = \vec{v}_0 \cdot \vec{u}_z = v_0 \sin \alpha$. On intègre alors l'équation du mouvement $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{z} = -g$:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \\ v_z = \dot{z} = -gt + \dot{z}(0) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \end{cases} \quad (2.6)$$

De la première équation, selon x , on peut tirer ^a

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)},$$

que l'on réinjecte dans la seconde équation :

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan(\alpha)x. \quad (2.7)$$

Le coefficient de x^2 étant négatif, il s'agit d'une parabole tournée vers le bas.

4. Calcul de la flèche H : à l'altitude $z = H$, la trajectoire $z(x)$ atteint un extremum. On cherche déjà l'abscisse x_f pour laquelle elle est atteinte et on calculera ensuite $H = z(x_f)$. On résout donc :

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x_f = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

et s'ensuit immédiatement :

$$H = z(x_f) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \tan \alpha.$$

Finalement, avec un peu de trigonométrie

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Comme attendu, la flèche est maximale lorsque le projectile est lancé à la verticale, i.e. $\alpha = \pi/2$, et nulle lorsque $\alpha = 0$ c'est-à-dire que le projectile est lancé à l'horizontale. Elle est strictement croissante entre les deux.

5. Calcul de la portée : on doit résoudre

$$z(x_p) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 + \tan(\alpha)x_p = 0.$$

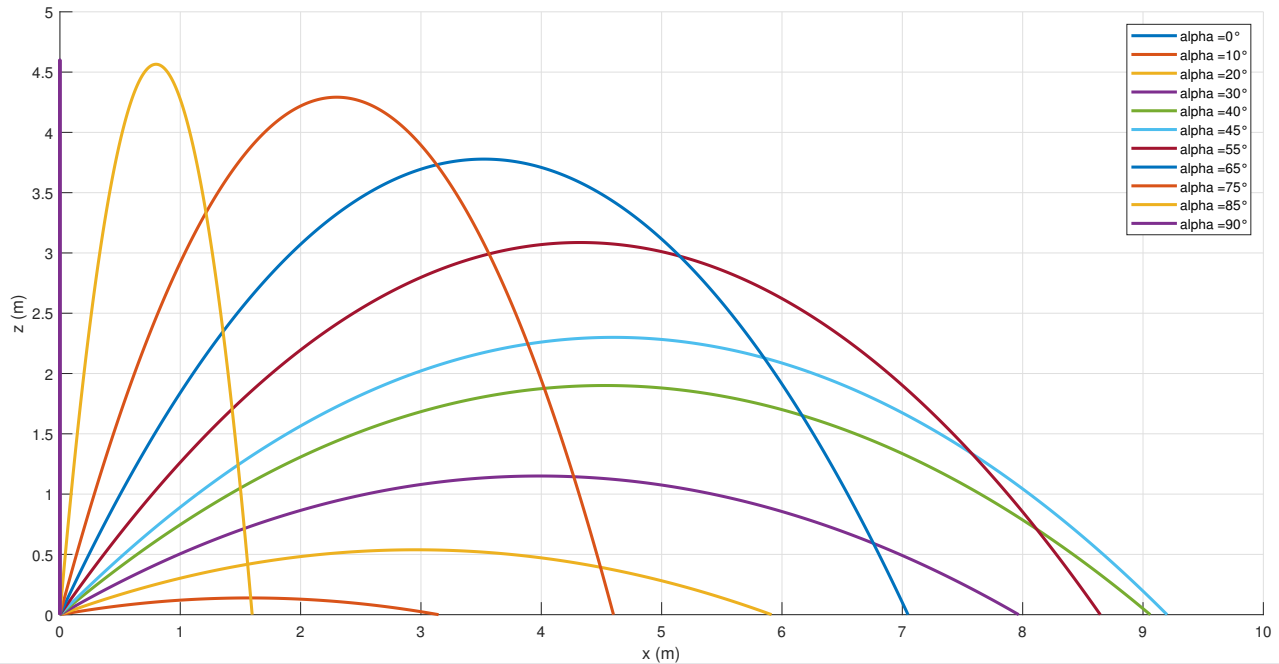
Cette équation se factorise immédiatement par x_p de sorte que les deux solutions sont évidentes :

$$x_p = 0 \quad \text{et} \quad x_p = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

La première solution correspond au point de départ, et la seconde à la portée.

Cette quantité est nulle pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce qui est conforme à l'intuition. Elle est maximale pour $\alpha = \pi/4$.

6.



a. Si $\cos \alpha = 0$ le mouvement est uniquement selon z et on est ramené au cas précédent, ce calcul n'a aucun intérêt.

Remarque

En fait tout les calculs de cet exercice relève d'une seule hypothèse : l'accélération est constante tout au long du mouvement, ici égale à \vec{g} . On verra que ce sera le cas aussi d'autres mouvements, comme celui d'une particule chargée dans un champ électrique.

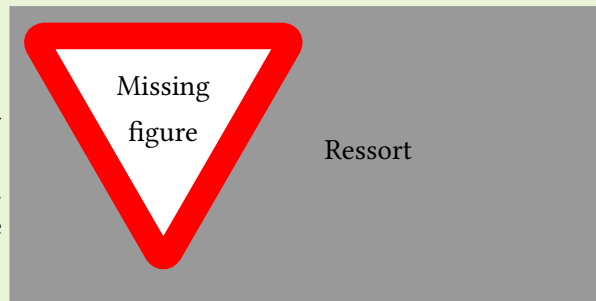
2.2.2 Force de rappel du ressort

Le ressort est un objet important en physique, non pas qu'il soit extrêmement intéressant en soi, mais il permet une modélisation simple, et relativement réaliste, d'un grand nombre de situations où les systèmes oscillent. Nous aurons l'occasion d'y revenir au chapitre 5. La force qu'un ressort exerce sur un point matériel M s'exprime ainsi :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$$

k est la raideur du ressort en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, l_0 est la longueur à vide ou longueur d'équilibre du ressort.

Il n'y a pas à réfléchir pour écrire cette expression. Si le problème est bien posé schématiquement elle prend *toujours* cette forme !



Généralement on se débrouille pour étudier directement la coordonnée $x = l - l_0$ qui représente l'écart à la position d'équilibre. Quoiqu'il en soit, on vérifiera toujours, sur l'expression finale de \vec{F}_{ressort} que

- si le ressort est comprimé ($l < l_0$) il pousse le point M ,
- si le ressort est étendu ($l > l_0$) il tire le point M .

Attention !

Des confusions évitables sur l'expression des forces de rappel sont souvent à l'origine d'erreurs importantes dans les copies de mécanique et je vous encourage vraiment à prendre le temps d'une double vérification avant de passer à la suite.

Exercice n°8 : Mouvements simples impliquant un ressort

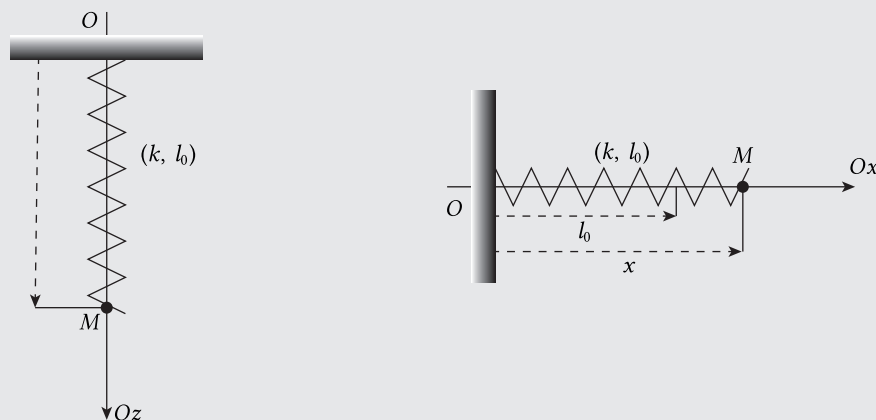
On considère ici deux situations simples impliquant chacune un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Le système étudié est un point matériel de masse m .

1. Dans un premier temps le ressort est suspendu au point O , fixe dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, et marquant l'origine de l'axe z descendant. Le point matériel M est attaché à l'autre extrémité. Quelle est sa position d'équilibre ?

2. Dans cette seconde situation, l'ensemble est posé sur un plan horizontal et se déplace sans frottement. Le point M est initialement écarté de la position d'équilibre l_0 d'une distance x_0 et lâché sans vitesse initiale. Quelle est l'équation du mouvement ?

Correction n°8 : Mouvements simples impliquant un ressort

Présentons le schéma des deux situations étudiées :



1. Dans ce premier cas le point M subit deux forces : son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_z$ et la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{e}_z$ où $l = z$ dans cette situation. On peut vérifier que cette expression redonne bien le bon sens de la force lorsque le ressort est comprimé ou étendu.

Le PFD appliqué à M dans \mathcal{R} donne

$$m\ddot{z} \vec{e}_z = mg \vec{e}_z - k(z - l_0) \vec{e}_z.$$

Projeté sur \vec{e}_z , et à l'équilibre, pour lequel $\ddot{z} = 0$, il vient :

$$mg = k(z_{\text{eq}} - l_0) \quad \text{d'où} \quad z_{\text{eq}} = \frac{mg}{k} + l_0.$$

Il est important de noter que cette longueur d'équilibre est d'autant plus grande que la masse du point / la pesanteur / la longueur à vide du ressort est grande, et plus petite si la raideur k est importante. Par ailleurs, elle ne peut en aucun cas être inférieure à l_0 .

2. Cette situation est plus que classique. Le point M est soumis à trois forces : son poids à nouveau $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$, le rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_x$ et ici $l - l_0 = x$. Enfin, une réaction du support dont on discutera plus loin, \vec{R} . Le PFD, appliqué à M dans \mathcal{R} , donne

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}$$

soit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \quad \text{selon } \vec{u}_x \\ 0 &= \vec{P} + \vec{R} \quad \text{selon } \vec{u}_z \end{aligned}$$

On se rend compte d'une part que la réaction du support compense exactement le poids dans cette situation (essentiellement parce qu'il n'y a pas de frottement). De plus, l'équation du mouvement est

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

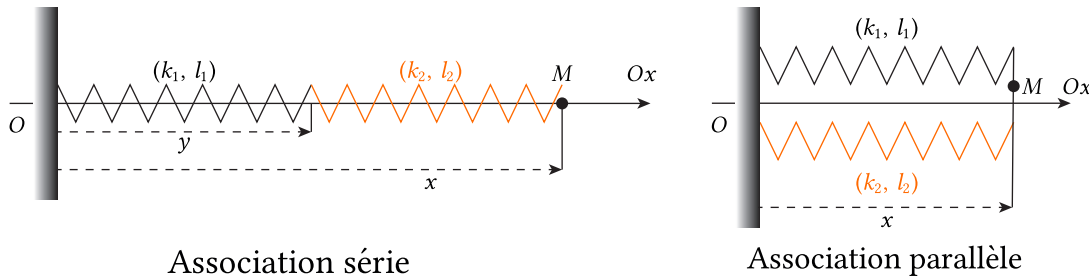
ω_0 est la pulsation propre du système.

Remarque

L'équation du mouvement obtenue dans la deuxième situation est primordiale. Il s'agit de l'équation d'un OSCILLATEUR HARMONIQUE sur laquelle nous reviendrons largement (cf. chap 5).

Exercice n°9 : Associations de ressorts et raideur équivalente

Dans cet exercice on associe deux ressorts et on se demande si l'ensemble peut être modélisé à son tour par un ressort unique de raideur k_{eq} et longueur à vide l_{eq} . Déterminer la raideur équivalente k_{eq} et la longueur équivalente l_{eq} lorsque les deux ressorts sont en série ou en parallèle (voir schéma). Les ressorts sont horizontaux.



Correction n°9 : Associations de ressorts et raideur équivalente

En parallèle : Dans ce cas la masse m subit deux forces exercées par chacun des deux ressorts :

$$m\ddot{x} = -k_1(x(t) - l_1) - k_2(x(t) - l_2).$$

À l'équilibre, il vient

$$x_{\text{eq}}(k_1 + k_2) = k_1 l_1 + k_2 l_2 \Rightarrow x_{\text{eq}} = \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{k_1 + k_2}.$$

Dans le cas classique où $k_1 = k_2 = k$ et $l_1 = l_2 = l_0$ on trouve donc comme attendu $x_{\text{eq}} = l_0$.

On peut alors réécrire le PFD en injectant l'expression de x_{eq} :

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1) - k_2(x - l_2) = -(k_1 + k_2)(x(t) - x_{\text{eq}}).$$

On retient donc que lorsque associés en parallèle on a

$$l_{\text{eq}} = \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad k_{\text{eq}} = k_1 + k_2.$$

En série : On applique cette fois le PFD deux fois, en $x(t)$ et en $y(t)$ donc la masse est nulle :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_2(x - y - l_2), \\ 0 = -k_1(y - l_1) + k_2(x - y - l_2). \end{cases}$$

On se place à l'équilibre pour trouver x_{eq} :

$$\begin{cases} 0 = -k_2(x - y - l_2), \\ 0 = -k_1(y - l_1) + k_2(x - y - l_2), \end{cases}$$

et en sommant les deux équations il vient $y_{\text{eq}} = l_1$ et $x_{\text{eq}} = l_1 + l_2$.

On peut alors noter $X(t) = x(t) - l_1 - l_2$ et $Y(t) = y(t) - l_1$ ce qui permet de réécrire les PFD :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -k_2(X - Y), \\ 0 = -k_1 Y + k_2(X - Y), \end{cases}$$

La deuxième équation permet d'exprimer $Y = \frac{k_2}{k_1 + k_2} X$ que l'on peut réinjecter dans la première pour obtenir

$$\ddot{X} = \underbrace{\left(-k_2 + \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} \right)}_{k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}} X$$

On retient donc que lorsque associés en série on a

$$l_{\text{eq}} = l_1 + l_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

2.2.3 Poussée d'Archimède

Le théorème d'Archimède affirme que : « Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée dirigée vers le haut et dont la norme est égale au poids du volume de fluide déplacé. »

Autrement dit, un corps dont un volume V_0 est plongé dans un fluide de masse volumique ρ_f reçoit une poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho_f V_0 g \vec{e}_z = -\rho_f V_0 \vec{g}$.

Pour démontrer l'expression de la poussée d'Archimède on considère le système constitué exactement du fluide qui sera bientôt remplacé par le solide immergé. Ce fluide est soumis bien sur à son poids $\vec{P} = -\rho_f V g \vec{u}_z$ mais, étant à l'équilibre, elle subit nécessairement une force équivalente tournée vers le haut. Cette force résulte du contact du fluide environnant et sera la même si le système est remplacé par un solide. C'est la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \rho_f V g \vec{u}_z$.

Exercice n°10 : Influence négligeable de la poussée d'Archimède de l'air

On a démontré dans un exercice précédent que lorsqu'on lâche un mobile de masse M sans frottement d'une altitude h à la surface de la Terre il tombe au sol en une durée $\tau = \sqrt{2h/g}$. Comment se résultat est-il modifié si on tient compte de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le mobile de volume V ? [Attention on ne parle pas de frottements ici!]

Correction n°10 : Influence négligeable de la poussée d'Archimède de l'air

Si on veut pouvoir décrire ce problème il faut se délivrer du modèle du point matériel et étudier, par exemple, une bille de volume V et masse volumique ρ_b (donc de masse $m = \rho_b V$). Le bilan des forces se résume au poids et à la poussée d'Archimède de l'air, et dans le référentiel de la Terre, galiléen, on écrit le PFD :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} \quad \text{d'où} \quad \rho_b V \ddot{z} = -\rho_b V g + \rho_a V g \quad \text{soit} \quad \ddot{z} = -\left(\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_b}\right)g.$$

On est donc ramené à un mouvement à accélération constante, c'est en fait une chute libre avec une pesanteur effective

$$g_{\text{eff}} = \left(\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_b}\right)g.$$

Pas besoin de résoudre puisque l'énoncé donne le temps de chute pour une chute libre, ici g est remplacée par g_{eff} et en prenant en compte la poussée d'archimède il vient

$$\tau_{\vec{\Pi}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \left(\frac{\rho_b}{\rho_b - \rho_a}\right)} = \tau \sqrt{\left(\frac{\rho_b}{\rho_b - \rho_a}\right)}.$$

Même avec un matériau relativement léger, comme le liège, pour lequel $\rho_b = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, avec pour l'air $\rho_a = 1,292 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ on a

$$\frac{\rho_b}{\rho_b - \rho_a} = 0.9935 \quad \text{donc} \quad \tau_{\vec{\Pi}} = 0.9968 \tau.$$

La prise en compte de la poussée d'Archimède de l'air ne change donc quasiment rien.

Exercice n°11 : Équilibre d'un bouchon en liège à la surface de l'eau

Un bouchon cylindrique, de rayon r et hauteur h , est constitué de liège de masse volumique ρ_l et déposé à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e . En supposant qu'il reste vertical, quelle hauteur du bouchon est immergée à l'équilibre ?

Correction n°11 : Équilibre d'un bouchon en liège à la surface de l'eau

On note z la hauteur de bouchon immergée et l'axe z est pris ascendant. Il subit alors deux forces : sont poids $\vec{P} = -mg = -\rho_l h \pi r^2 g$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho_e z \pi r^2 g$. Le PFD appliqué au bouchon dans le référentiel de la Terre supposé galiléen donne :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} \quad \text{d'où} \quad \rho_l h \pi r^2 \ddot{z} = -\rho_l h \pi r^2 g + \rho_e z \pi r^2 g.$$

L'équilibre est atteint lorsque le bouchon ne bouge plus, $\ddot{z} = 0$, soit

$$\rho_l h \pi r^2 g = \rho_e z_{\text{eq}} \pi r^2 g \quad \text{i.e.} \quad z_{\text{eq}} = h \frac{\rho_l}{\rho_e}.$$

Bien sûr, plus le matériau est dense (ρ_l grand) plus le bouchon s'enfonce et à l'inverse plus le fluide est dense (ρ_e grand) moins le bouchon s'enfonce. Dans le cas considéré du liège et de l'eau on a $z = 0.2h$.

Remarque : le faible enfoncement du bouchon dans l'eau favorise son basculement et sa mise à l'horizontale. Vous pouvez refaire le même calcul dans ce cas mais la géométrie complexifie un peu le raisonnement.

2.2.4 Frottements fluides

La modélisation générale de la force de frottement fluide est complexe. Nous en reparlerons dans le cours de mécanique des fluides mais retenons qu'il existe essentiellement deux modèles :

- un modèle linéaire « à basse vitesse » : $\vec{F}_{\text{fluide}} = -\lambda \vec{v}$, où λ est une constante positive.
- un modèle quadratique « à haute vitesse » : $\vec{F}_{\text{fluide}} = -\alpha \|\vec{v}\| \vec{v}$, où α est une constante positive.

Dans les deux cas cette force de frottement qui s'oppose au mouvement du point M est dans le sens opposé à la vitesse. La limite entre ces deux modélisations n'est pas tranchée et la réalité expérimentale est souvent plus compliquée. Il est d'usage de privilégier le premier modèle, qui a l'avantage d'être exploitable analytiquement, sauf mention contraire dans l'énoncé.

Exercice n°12 : Freinage d'une voiture par effet de l'air

Une voiture de masse m , roulant rectilignement à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, coupe son moteur à $t = 0$ et n'est plus soumise, suivant \vec{u}_x , qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{F} = -h \vec{v}$.

1. Écrire la loi de variation de v en fonction du temps (on fera apparaître une constante de temps τ). Au bout de combien de temps la voiture s'arrête-t-elle ?
2. En déduire l'équation horaire du mouvement. Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue ?

Correction n°12 : Freinage d'une voiture par effet de l'air

1. Selon \vec{u}_x la voiture ne subit que la force de frottement fluide $-h \vec{v} = -h \dot{x} \vec{u}_x$ de sorte que par application du PFD dans le référentiel de la Terre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_x , on a :

$$m\dot{v} = -hv \quad \text{i.e.} \quad \dot{v} = -\frac{h}{m}v.$$

$m/h = \tau$ est le temps caractéristique du problème, on sera mieux en mesure de l'interpréter lorsqu'on aura résolu l'équation du mouvement.

L'équation précédente s'intègre une fois sans problème :

$$v(t) = a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{et} \quad v(0) = v_0 \Rightarrow a = v_0.$$

Ainsi, au sens strict la voiture ne s'arrête jamais puisqu'on n'aura pas $v(t) = 0$. Cependant, pour $t = 3\tau$ on a $v(3\tau)/v_0 = 5\%$ et pour $t = 5\tau$, $v(5\tau)/v_0 = 0,7\%$. La voiture est donc quasiment immobile et sa vitesse décroît encore.

Dans les faits, ce sont les frottements solides qui stoppent tout à fait le mouvement.

2. Une nouvelle intégration permet de remonter à l'équation horaire du mouvement : $x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$. La voiture s'arrête donc en $x_f = v_0 \tau = mv_0/h$.

Remarque

De cet exercice on retiendra surtout ces résultats importants au sujet de la décroissance exponentielle. τ étant le temps caractéristique de décroissance, on atteint :

- 63 % de la valeur finale en $t = \tau$,
- 95 % de la valeur finale en $t = 3\tau$,
- 99 % de la valeur finale en $t = 5\tau$.

2.2.5 Frottements solides, réaction du support

La modélisation des frottements solides entre deux corps est très complexe. Pour le cas de la dynamique du point, on se limite généralement à un énoncé simplifié des LOIS DE COULOMB. Leur énoncé suppose d'avoir défini la VITESSE DE GLISSEMENT :

Sur un support Σ fixe on aura simplement

$$v \cdot v_g(M/\Sigma) = \vec{v}(M/\Sigma)$$

D'un solide sur un autre solide, les deux en contact et en mouvement relatif on a :

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I' \in \mathcal{S}_2/\mathcal{R}).$$



Le contact est modélisé par une force nommée réaction du support \vec{R} qu'on décompose en deux composantes : la réaction normale \vec{N} et la réaction tangentielle \vec{T} ("les frottements"). On a alors $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$. Les lois de Coulomb stipulent :

- Dans le cas où les deux solides ne glissent pas l'un sur l'autre, c'est-à-dire $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$, on a

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|.$$

- Dans le cas où les deux solides glissent l'un sur l'autre, c'est-à-dire $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \neq \vec{0}$, on a

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \quad \text{les frottements dissipent de l'énergie.}$$

f_s et f_d sont les coefficients de frottements statique (ou d'adhérence) et dynamique. Ils sont indépendants de l'aire du contact. On a toujours $f_s < f_d$ et généralement $f_s, f_d \leq 1$ sauf dans des cas d'adhérence extrême (colle, pneus de F1 sur le bitum, etc.).

Les mouvements du solide en présence de frottements peuvent être plus compliqués : mouvement de roulement avec/sans glissement, bascule, etc.

Exercice n°13 : Enfant glissant sur un igloo

Un enfant, ramené à un point matériel M de masse m , glisse sans frottement sur un igloo hémisphérique de rayon a . On repère sa position grâce à l'angle θ qu'il fait avec la verticale. L'enfant est initialement en $\theta_0 = 0$ et sa vitesse est nulle.

1. Faire un schéma avec le repère cartésien, la base polaire locale, les forces subies par l'enfant.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur la base polaire.
3. En intégrant une des deux équations obtenues, trouver une relation entre $\dot{\theta}$ et θ .
4. En déduire l'expression de la réaction normale en fonction de θ . L'enfant décolle-t-il? Si oui, pour quelle

valeur de θ ?

Correction n°13 : Enfant glissant sur un igloo

1.

2. Le pfd s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. Dans le repère polaire, ceci donne :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = R - mg \cos \theta \\ ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases} .$$

3. On multiplie la deuxième relation par $\dot{\theta}$ et on intègre entre 0 et θ . Comme $\dot{\theta}(0) = 0$, on obtient :

$$a\dot{\theta}^2/2 = mg(1 - \cos \theta).$$

4. On réinjecte dans la première relation pour finalement obtenir

$$R = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 = mg(3 \cos \theta - 2).$$

On voit que la réaction normale s'annule pour $\cos \theta_d = 2/3$. L'enfant décolle donc pour $\theta_d = \arccos 2/3 \approx 48^\circ$.

Exercice n°14 : Solide sur un plan incliné

Un solide de masse m est posé à une distance l du bord d'un plan mobile faisant initialement un angle $\alpha = 0^\circ$ avec l'horizontale.

1. On augmente progressivement l'angle α . Déterminer l'angle α_c à partir duquel le mobile se met à glisser.
2. On suppose que $\alpha = \alpha_c$. Déterminer l'équation horaire du mouvement.

Correction n°14 : Solide sur un plan incliné

Voir DM n°1.

2.2.6 Forces exercées sur une particule chargée

La charge électrique se mesure en Coulomb (noté C). La charge électrique élémentaire, notée e , vaut $1,6 \cdot 10^{-19}$ C. $-e$ est par exemple la charge de l'électron. Toutes les charges rencontrées sont nécessairement des multiples de la charge élémentaire.

Force exercée par une autre charge En présence de deux charges q_1 et q_2 , l'une exerce sur l'autre une force dite INTERACTION COULOMBIENNE :

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r,$$

où $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F · m⁻¹ est la permittivité diélectrique du vide (voir cours d'électromagnétisme).

Du fait que les charges q_1 et q_2 sont des multiples de la charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C c'est la norme de cette force est très faible à moins qu'on prenne $r \rightarrow 0$, c'est-à-dire de regarder des distances très faibles, de l'ordre de la cohésion atomique.

On ne manquera pas de remarquer l'analogie avec la gravitation. Elle sera exploitée plus en détails dans le cours d'électromagnétisme. Contentons nous de remarquer qu'ici la force de Coulomb peut-être attractive ou répulsive selon le signe relatif des deux charges, tandis que la gravitation est toujours attractive puisqu'il n'existe pas de masse négative.

Force exercée par un champ électromagnétique En présence d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , une particule portant une charge électrique q est soumise à la FORCE DE LORENTZ :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (2.8)$$

+ Rappel de comment on calcule le produit vectoriel.

L'étude approfondie de l'effet des ces forces constituent le chapitre 7.

2.3 Ouverture : les quatre interactions fondamentales

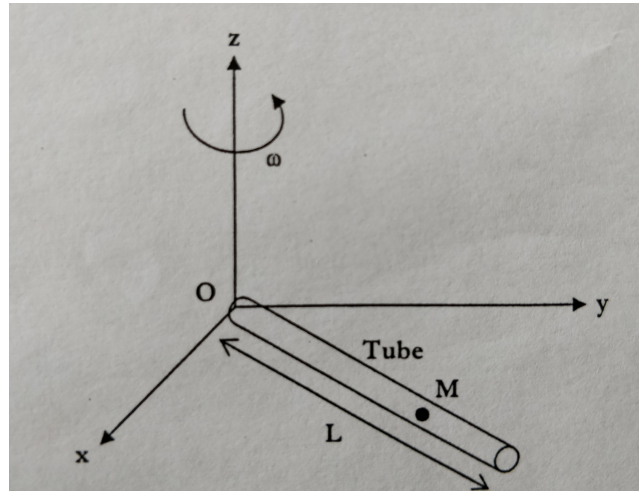
En réalité, on peut résumer *toutes* les forces aux quatre interactions fondamentales suivantes :

- La force électromagnétique, que l'on a décrit plus haut avec la force de Coulomb et celle de Lorentz, régit l'essentiel des phénomènes à notre échelle. C'est la force prédominante pour la vie humaine, qui permet la cohésion de la matière et la conduction électrique notamment.
- La force gravitationnelle, elle aussi décrite précédemment, est l'interaction des (très) grandes échelles, celle qui régit certes la dynamique des corps autour de nous mais surtout la dynamique des astres.
- L'interaction forte permet la cohésion des nucléons du noyau! Elle doit donc être « forte » pour contrer l'effet répulsif de la force électromagnétique. Par définition, elle s'appliquent aux hadrons mais pas aux leptons. Notons enfin qu'elle est une manifestation de l'interaction de couleur des quarks (ce qui nous emmène déjà bien loin du programme de l'agrégation).
- L'interaction faible concerne les *quarks* et les *leptons* (électron et ses cousins, muons, tau, neutrinos, etc.). Elle est (surprise) de faible intensité et de très courte portée ($10 \cdot 10^{-18}$ m). Elle permet d'expliquer un certain nombre de phénomènes à l'échelles des particules fondamentales : transformation des quarks, désintégration des neutrinos, transformation du muon en électron par émission de neutrino et anti-neutrino, etc. Elle a été décrite pour la première fois par Fermi en 1933 et est aujourd'hui englobé avec l'interaction électromagnétique pour formée l'*intercation électrofaible*.

2.4 Exercices complémentaires

Exercice n°15 : Bille dans un tube en rotation

Un tube creux de longueur L tourne autour d'un point O fixe à la vitesse angulaire ω constante. On place dans ce tube une bille M de masse m qui coulisse sans frottements.



- Déterminer le mouvement de la bille dans le tube en donnant l'évolution de la distance $r(t)$ au point O , sachant qu'à $t = 0$ la bille est à une distance $d < L$ de O , sans vitesse initiale.
- Au bout de combien de temps la bille est-elle éjectée ?
- On attache la bille à un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité est fixée en O . Montrer que la bille peut effectuer des oscillations harmoniques autour d'une position à déterminer. À quelle condition ceci est-il possible ?

Correction n°15 : Bille dans un tube en rotation

1. Le système est la bille étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen (!). Elle est soumise à son poids et à la réaction du support qui se compensent.

En réalité il est complexe de définir la réaction du support dans ce cas...mais peu nous importe, car nous allons projeter sur l'unique direction où il n'y a pas de forces : la direction radiale.

On a alors d'après le pfd $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0$. On obtient donc l'équation différentielle

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

dont les solutions peuvent s'écrire sous la forme $r(t) = A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$. Comme $r(0) = d$ et $\dot{r}(0) = 0$, il vient $r(t) = d \cosh(\omega t)$.

2. On veut le temps t_{ej} tel que $L = d \cosh(\omega t_{ej})$ soit

$$t_{ej} = \frac{1}{\omega} \operatorname{argcosh}(L/d)$$

qui est bien défini car $L > d$.

3. Le ressort ajoute une force radiale de rappel $\vec{F} = -k(r - r_0)\vec{u}_r$. L'équation du mouvement est à présent

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) r = \frac{k}{m} r_0$$

Le terme de droite importe peu (on pourrait le réabsorber en définissant la position d'équilibre $r_{eq} = \frac{k/mr_0}{k/m - \omega^2}$ et en posant $x = r - r_{eq}$). Le membre de gauche est bien l'équation d'un oscillateur harmonique si $k/m > \omega^2$. Le ressort doit donc être suffisamment raide (ou la rotation suffisamment lente) pour permettre des oscillations autour de la position d'équilibre.

Exercice n°16 : Propulsion d'une fusée

Dans cet exercice, et pour à peu près la seule fois de ce TD, on se propose d'étudier un système ouvert. On étudie le décollage et le vol d'une fusée de masse initiale m_0 (masse de la fusée et du carburant). On notera, à l'instant t , $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_z$ la vitesse de la fusée, $m(t)$ la masse du système {fusée + gaz contenus dedans à l'instant t } (système ouvert \mathcal{S}) et le débit massique d'éjection des gaz brûlés $D_m = -\frac{dm}{dt} > 0$. Les gaz sont éjectés avec une vitesse $\vec{u} = -u\vec{u}_z$ relativement à la fusée. On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Pour pouvoir discuter du PFD on définit le système *fermé* Σ constitué :

- à l'instant t , de l'ensemble {fusée + gaz contenus}, soit

$$\Sigma(t) = \mathcal{S}(t),$$

- à l'instant $t + dt$, de la fusée, des gaz restants et des gaz éjectés pendant dt , soit

$$\Sigma(t + dt) = \mathcal{S}(t + dt) + \{\text{gaz éjectés pendant } dt\}.$$

Quelle est la quantité de mouvement du système Σ à l'instant t ? à l'instant $t + dt$? Exprimer alors $d\vec{p}_\Sigma/dt$.

2. La fusée est soumise à un ensemble de champ de gravitation résultant en une force notée \vec{F}_{ext} . Appliquer le PFD à la fusée dans le référentiel de la Terre supposé galiléen. En se ramenant à une expression de la forme $m\vec{a} = \dots$, identifier la *force de poussée*. Commenter son expression, sens, etc.

3. À quelle condition la fusée décolle-t-elle?

4. Lorsque la fusée a échappé à la gravité, on montre la relation de Tsiolkovski qui relie l'accroissement de vitesse Δv à la diminution de masse de m_i à m_f :

$$\Delta v = u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right).$$

En considérant une fusée de masse totale $m_0 = 134$ t, constituée d'un premier étage de masse $m_1 = 110$ t dont 100 tonnes d'ergols (carburant), et un deuxième étage de $m_2 = 24$ t dont 20 tonnes d'ergols, et une vitesse d'éjection $u = 4,0$ km \cdot s⁻¹, montrer l'intérêt de cette construction par étage.

Correction n°16 : Propulsion d'une fusée

1.

Équation du mouvement Réalisons un bilan de quantité de mouvement. À l'instant t , tout le système a la vitesse de la fusée :

$$\vec{p}_\Sigma(t) = m(t)\vec{v}(t).$$

À l'instant $t + dt$, la fusée et les gaz restants ont une quantité de mouvement $m(t + dt)\vec{v}(t + dt)$, tandis que les gaz éjectés, de masse $D_m dt$, ont une vitesse $\vec{v}_g = \vec{v}(t + dt) + \vec{u}$, d'où :

$$\vec{p}_\Sigma(t + dt) = m(t + dt)\vec{v}(t + dt) + D_m [\vec{v}(t + dt) + \vec{u}] dt.$$

En utilisant la conservation de la masse $m(t) = m(t + dt) + D_m dt$, la variation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p}_\Sigma(t + dt) - \vec{p}_\Sigma(t) = m(t) [\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)] + D_m \vec{u} dt$$

d'où en divisant par dt et en prenant la limite $dt \rightarrow 0$,

$$\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}.$$

Remarque

Il ne faudrait pas vouloir écrire trop rapidement :

$$\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt} = \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}(t) = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - D_m\vec{v},$$

car cela suppose que les gaz éjectés ont une vitesse \vec{v}_g nulle. Au contraire, il faut faire attentivement un vrai bilan de quantité de mouvement.

2. On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique au système fermé Σ , qui s'écrit $d\vec{p}_\Sigma/dt = \vec{F}_{\text{ext}}$, ou encore, en vertu de ce qui précède :

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} - D_m\vec{u}.$$

On identifie donc une FORCE DE POUSSÉE $\vec{F}_p = -D_m\vec{u}$. Pour une fusée décollant à la verticale, et n'étant soumise qu'à son poids $m(t)\vec{g}$, on a en projection suivant \vec{u}_z :

$$\boxed{m(t)\frac{dv}{dt} = -m(t)g + D_mu} \quad (2.9)$$

La force de poussée est bien verticale ascendante, et lutte contre la pesanteur.

3. La condition de décollage s'écrit $dv/dt > 0$, d'où :

$$-m_0g + D_mu > 0 \quad \iff \quad D_mu > m_0g.$$

Le choix du carburant impose la vitesse d'éjection, et on peut comparer les avantages et inconvénients de divers modes de propulsion : chimique, ionique (Le carburant, au lieu d'être brûlé, est *ionisé*. Les ions formés sont alors accélérés via des grilles chargées, et la conservation de la quantité de mouvement conduit à une force de propulsion opposée à cette accélération).

4.

- En consommant successivement le carburant de chacun des deux étages, on a d'abord :

$$\Delta v_1 = 4 \times \ln\left(\frac{134}{34}\right) \approx 5,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

puis le largage du premier étage vide se fait sans gain de vitesse (car sa vitesse d'éjection est nulle) et enfin l'utilisation du carburant du deuxième étage confère

$$\Delta v_2 = 4 \times \ln\left(\frac{24}{4}\right) \approx 7,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Si la même fusée était construite en un seul étage (mêmes quantités d'ergols et de structure), on aurait :

$$\Delta v = 4 \times \ln\left(\frac{134}{14}\right) \approx 9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} < \Delta v_1 + \Delta v_2.$$

L'intérêt de construire les fusées par étage est de les larguer successivement afin de diminuer la masse restante à propulser.

L'exercice suivant est à faire après le cours d'électromagnétisme sur le théorème de Gauss.

Exercice n°17 : Champ de gravitation engendré par un corps à symétrie sphérique

1. Rappeler l'analogie entre électromagnétisme et gravitation.
2. Par application du théorème de Gauss gravitationnel, exprimer le champs de gravitation créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse m homogène.
3. Commenter l'expression obtenue pour $r > R$.

Correction n°17 : Champ de gravitation engendré par un corps à symétrie sphérique

1. L'analogie se retrouve aisément en se rappelant l'expression des force

$$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r, \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{grav}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r.$$

On a donc notamment $q \leftrightarrow m$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -\mathcal{G}$ et $\vec{E} \leftrightarrow \vec{G}$.

2. Le théorème de Gauss gravitationnel appliqué à une surface fermée sphérique centrée sur le centre de l'astre et de rayon r ,

$$\oiint \vec{G} d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} m_{\text{int}}.$$

La symétrie sphérique permet d'affirmer que \vec{G} est selon \vec{u}_r et indépendant de θ et φ . De plus, la valeur de m_{int} dépend de la comparaison de r par rapport à R :

- si $r > R$, on a $m_{\text{int}} = m$ et le théorème de Gauss donne

$$4\pi r^2 \vec{G}(r) = -4\pi\mathcal{G} m,$$

- si $r < R$, on a $m_{\text{int}} = m \frac{r^3}{R^3}$ et le théorème de Gauss donne

$$4\pi r^2 \vec{G}(r) = -4\pi\mathcal{G} m \frac{r^3}{R^3}$$

Ainsi,

$$\vec{G}(r) = \begin{cases} -\mathcal{G} \frac{m}{R^3} \vec{u}_r & \text{si } r < R \\ -\mathcal{G} \frac{m}{r^2} \vec{u}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

3. On constate donc que pour $r > R$ le champ est exactement le même que celui engendré par un point matériel de masse m placé au centre de l'astre. Autrement dit, la symétrie sphérique garantit qu'en dehors du solide le modèle du point matériel permet d'obtenir des résultats exacts.

Exercice n°18 : Livraison d'un colis par avion

1. Un avion vole horizontalement à une altitude $h_0 = 500$ m et à une vitesse $v_0 = 100$ km/h. Il lâche un colis de masse $m = 50$ kg. On néglige les frottements exercés par l'air. Quelle distance horizontale le colis a-t-il parcouru lorsqu'il touche le sol? Quelle est sa vitesse au moment de l'impact?
2. Même question avec des frottements fluides linéaires de constante $\lambda = 25$ kg/s.

Correction n°18 : Livraison d'un colis par avion

1. Il s'agit d'une application simple de la balistique sans frottements : les équations horaires sont

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad z(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2.$$

On en déduit le temps de chute t_0 tel que $z(t_0) = 0$, soit $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$, et donc la distance parcourue horizontalement $D = v_0 \sqrt{2h_0/g} \approx 280$ m. À ce moment, la vitesse totale vaut

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + \left(g \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2} \approx 102 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. En présence de frottements $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, il faut soigneusement intégrer les équations du mouvement. On pose $\tau = m/\lambda$. On a

$$\dot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -\frac{z}{\tau} - g.$$

On peut intégrer ces deux équations une première fois pour obtenir \dot{x} et \dot{z} .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K e^{-t/\tau} = v_0 e^{-t/\tau} \\ \dot{z}(t) = K' e^{-t/\tau} - g\tau = g\tau(e^{-t/\tau} - 1) \end{cases}$$

Pour obtenir \dot{x} , on a utilisé la condition initiale $\dot{x}(0) = v_0$. Pour \dot{z} , on a ajouté la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière $-g\tau$ et utilisé $\dot{z}(0) = 0$.

On peut à présent intégrer une seconde fois

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \\ z(t) = g\tau (-\tau e^{-t/\tau} - t) + K'' \end{cases}$$

Dans la première ligne on a utilisé que $x(0) = 0$. Enfin, on veut $z(0) = h_0$ soit $-g\tau^2 + K'' = h_0$. On peut présenter le résultat sous la forme

$$z(t) = h_0 + g\tau^2 \left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau}\right).$$

À présent, il est nécessaire de faire des hypothèses : on veut résoudre $z(t_0) = 0$ pour trouver le temps de chute, ce qui n'est pas possible analytiquement. On peut remarquer que $\tau = 2$ s, et supposer que le temps de chute est grand devant 2s (il en valait déjà presque 10 pour la chute sans frottements). On écrit donc que $t_0/\tau \gg 1$, ce qui permet de négliger l'exponentielle et le 1 devant $-t/\tau$. On a alors

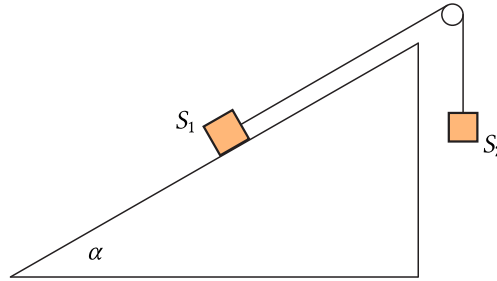
$$h_0 - g\tau^2 \frac{t_0}{\tau} = 0 \implies t_0 = \frac{h_0}{g\tau}$$

Numériquement, $t_0 \approx 25$ s, donc l'approximation est justifiée.

On en déduit la distance de chute $x(t_0) = D \approx v_0 \tau = \frac{h_0 v_0}{g\tau} = 694$ m, et la vitesse finale $v_f \approx g t_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On trouve bien une distance parcourue plus grande et une vitesse finale plus faible, ce qui est conforme à l'intuition physique.

Exercice n°19 : Comportement d'un système masses - poulie - frottements

Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.



S_1 de masse m_1 glisse sur le plan incliné et S_2 de masse m_2 se déplace verticalement. Ces solides sont en translation, assimilés à des points matériels. On suppose que le fil est inextensible et de masse nulle, il transmet donc les tensions, c'est-à-dire que la tension est la même à chacune de ses extrémités.

À $t = 0$, le système est libéré sans vitesse initiale et S_2 est à une hauteur h du sol.

1. À quelle condition sur les masses m_1 et m_2 le solide S_2 atteint-il le sol? Déterminer alors sa vitesse au moment de l'impact.
2. Même question s'il existe des frottements solides au niveau du plan incliné. On notera μ le coefficient de frottement.

Correction n°19 : Comportement d'un système masses - poulie - frottements

1. On étudie S_2 soumis à son poids $m_2 \vec{g}$ et à la tension \vec{T}_2 du fil. Pfd selon l'axe z vertical : $m_2 \ddot{z}_2 = T_2 - m_2 g$. On étudie S_1 soumis à son poids $m_1 \vec{g}$, la réaction normale de la table \vec{R}_N et à la tension \vec{T}_1 du fil. On se dote d'un axe x_1 le long de la pente. Pfd projeté selon \vec{e}_{x_1} : $m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 + m_1 g \sin \alpha$.

On somme ensuite ces deux équations, et on remarque que comme le fil est tendu et inextensible, d'une part $T_1 = T_2$, d'autre part $\ddot{z}_2 = \ddot{x}_1$. On obtient donc

$$(m_1 + m_2) \ddot{z}_2 = (m_1 \sin \alpha - m_2) g \Rightarrow \ddot{z}_2 = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g = \kappa$$

Le solide S_2 tombe si $\ddot{z}_2 < 0$, il faut donc que $m_2 > m_1 \sin \alpha$.

Il s'agit d'un mouvement à accélération constante : on a $z_2(t) = h + \frac{1}{2} \kappa t^2$ et $\dot{z}_2(t) = \kappa t$. La chute dure donc un temps $t_f = \sqrt{2h/\kappa}$ et la vitesse à l'arrivée est de $v_f = \sqrt{2\kappa h}$.

2. En cas de présence de frottements solides au niveau de S_1 , il faut également prendre en compte la réaction tangentielle du support \vec{R}_T .

L'équation pour S_2 reste la même : $m_2 \ddot{z}_2 = T_2 - m_2 g$.

Pour S_1 , en supposant que le mouvement se fait en remontant la pente, \vec{v}_1 est selon $-\vec{u}_{x_1}$ donc la réaction tangentielle est selon \vec{u}_{x_1} . L'équation devient

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 + m_1 g \sin \alpha + R_T$$

Par ailleurs, l'équation sur l'autre axe (perpendiculaire à x_1) s'écrit $R_N - m_1 g \cos \alpha = 0$, et les lois de Coulomb (glissement) donnent $R_T = \mu R_N$. On a donc finalement

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 + m_1 g \sin \alpha + \mu m_1 g \cos \alpha$$

De la même manière qu'au 1., on a $\ddot{x}_1 = \ddot{z}_2$ et $T_1 = T_2$. On en déduit alors l'équation du mouvement pour le solide S_2

$$\ddot{z}_2 = \frac{(m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

et il y a mouvement dès lors que $m_2 > m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

Chapitre 3

Aspects énergétiques

La description énergétique de la mécanique est importante par plusieurs aspects. D'une part elle permet de faire le lien avec les autres branches de la physique (électromagnétisme, thermodynamique, etc.) puisque l'énergie est la quantité transverse de la physique par excellence. De plus, les théorèmes énergétiques permettent toujours de mener à une (mais une seule) équation scalaire qui, lorsque le problème étudié possède un unique degré de liberté, suffit à conclure.

3.1 Énergie développée par une force

Travail On appelle TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE D'UNE FORCE \vec{F} sur un déplacement infinitésimal $d\vec{l}$ la quantité $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ et TRAVAIL D'UNE FORCE \vec{F} le long du chemin AB la quantité

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (3.1)$$

C'est une énergie fournie (absorbée si le travail est négatif) par la force \vec{F} pendant le mouvement de M entre A et B . Elle s'exprime donc en Joule J et $[E] = ML^2T^{-2}$.

Puissance Lorsqu'un point M est soumis à la force \vec{F} en se déplaçant à une vitesse \vec{v} , on définit la PUISSANCE de cette force par

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3.2)$$

C'est une énergie fournie (absorbée si la puissance est négative) par unité de temps, qui s'exprime en Watt : $W = J \cdot s^{-1} = ML^2T^{-3}$.

3.2 Énergies usuelles des systèmes mécaniques

Énergie cinétique L'ÉNERGIE CINÉTIQUE d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)$ est la quantité :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}. \quad (3.3)$$

Il est important de noter que l'énergie d'un système en mouvement varie comme le carré de la vitesse et non proportionnellement à celle-ci. Cela explique notamment beaucoup de mesure de sécurité routière !

Énergie potentielle En général, le travail d'une force dépend fortement du trajet suivi : on se doute qu'une voiture consomme d'avantage d'énergie si on fait Paris-Marseille en passant par Lyon ou par Vladivostok...

Il existe cependant une classe de forces dites CONSERVATIVES dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée, et pas du chemin suivi pour les relier.

Une force \vec{F} conservative dérive d'une énergie potentielle, c'est-à-dire qu'il existe une fonction des coordonnées d'espace et du temps $E_p(x, y, z, t)$ telle que l'on puisse écrire

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

On appelle alors ÉNERGIE POTENTIELLE (associée à \vec{F}) cette fonction E_p .

Exercice n°20 : Caractère conservatif du poids et de la force de rappel d'un ressort

Afin de démontrer que le poids et la force de rappel d'un ressort sont conservatives, identifier les énergies potentielles associées.

Correction n°20 : Caractère conservatif du poids et de la force de rappel d'un ressort

On démontre facilement qu'avec pour énergie potentielle de pesanteur (associée au poids)

$$E_{p,pes} = -mgz + \text{cste}, \quad \text{on a bien} \quad \vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,pes}) = \frac{dE_{p,pes}}{dx} \vec{u}_x + \frac{dE_{p,pes}}{dy} \vec{u}_y + \frac{dE_{p,pes}}{dz} \vec{u}_z.$$

De même avec l'énergie élastique (associée au rappel du ressort)

$$E_{p,el} = -\frac{1}{2}k(x - l_0)^2, \quad \text{on vérifie} \quad \vec{F}_{\text{rappel}} = -k(x - l_0) \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,el}).$$

Ces deux définitions [W ne dépend pas du chemin suivi Vs $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$] sont bien équivalentes en vertu du calcul suivant :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dE_p \\ &= E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \end{aligned}$$

Ainsi, le travail fourni par \vec{F} entre A et B ne dépend que de la valeur de E_p au départ et à l'arrivée. Par ailleurs, il s'agit d'une différence, donc la constante indéterminée liée à la définition de l'énergie potentielle importe peu.

Remarque

- Le signe moins devant le gradient est une convention, mais est néanmoins important comme nous le verrons dans la section suivante. Il ne faut pas l'oublier lorsqu'on calcule l'énergie potentielle associée à une force conservative.
- La définition par le gradient signifie que l'énergie potentielle est définie à une constante près (dont le gradient sera nul !). En général, on est intéressé par des différences ou variations d'énergie poten-

tielle et la constante importe peu. Si toutefois on donne une valeur absolue d'énergie potentielle, il convient de préciser la référence qu'on se donne (par exemple, on prend souvent l'énergie potentielle de pesanteur nulle à l'altitude zéro). C'est l'équivalent, en mécanique, de la masse en électrocinétique qui sert de référence de potentiel électrique.

- Attention à la dérivation qui permet de passer de l'énergie à la force : il s'agit bien d'une dérivation par rapport à l'espace. Jusque là nous faisons essentiellement des dérivations par rapport au temps, et nous y reviendrons très vite. Attention à se mettre bien au clair sur cette question.

Exercice n°21 : Un calcul de travail

Soit un point M évoluant dans le plan, soumis à une force

$$\vec{F}(x, y) = \alpha[(y^2 - x^2)\vec{u}_x + 3xy\vec{u}_y].$$

Soient les points $A(p, 0)$, $B(0, p)$, $C(p, p)$. Calculer :

- le travail de \vec{F} en allant de l'origine à C en passant par A .
- le travail de \vec{F} en allant de l'origine à C en passant par B .
- le travail de \vec{F} en allant de l'origine à C directement.

Conclure.

Correction n°21 : Un calcul de travail

De O à C via A : On calcule le travail en deux morceaux : de O à A on intègre $\vec{F}(x, 0) \cdot (dx \vec{u}_x)$ de 0 à p puis de A à C on intègre $\vec{F}(p, y) \cdot (dy \vec{u}_y)$ de 0 à p . Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{OAC}(\vec{F}) &= \int_0^p dx \vec{F}(x, 0) \cdot \vec{u}_x + \int_0^p dy \vec{F}(p, y) \cdot \vec{u}_y \\ &= \int_0^p dx \alpha(-x^2) + \int_0^p dy \alpha 3py = -\alpha \frac{p^3}{3} + 3\alpha p \frac{p^2}{2} = \frac{7\alpha p^3}{6}. \end{aligned}$$

De O à C via B : On calcule le travail en deux morceaux : de O à B on intègre $\vec{F}(0, y) \cdot (dy \vec{u}_y)$ de 0 à p puis de B à C on intègre $\vec{F}(x, p) \cdot (dx \vec{u}_x)$ de 0 à p . Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{OBC}(\vec{F}) &= \int_0^p dy \vec{F}(0, y) \cdot \vec{u}_y + \int_0^p dx \vec{F}(x, p) \cdot \vec{u}_x \\ &= \int_0^p dy \times 0 + \int_0^p dx \alpha(p^2 - x^2) = \alpha \left(p^3 - \frac{p^3}{3} \right) = \frac{2\alpha p^3}{3}. \end{aligned}$$

De O à C directement : Le calcul est un peu plus compliqué. On suit la droite $y = x$, ce qui est pratique, et $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ et $dx = dy$:

$$\begin{aligned} W_{OC}(\vec{F}) &= \int_O^C \vec{F}(x, x) \cdot (dx \vec{u}_x + dx \vec{u}_y) \\ &= \int_0^p dx (\alpha(x^2 - x^2) + 3xx) = \int_0^p 3x^2 = p^3. \end{aligned}$$

En calculant le travail entre deux mêmes points sur trois chemins différents on trouve trois valeurs différentes. On en déduit que la force n'est pas conservative.

Énergie mécanique L'énergie mécanique est définie comme la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$E_m = E_c + E_p. \quad (3.4)$$

3.3 Théorèmes énergétiques

3.3.1 Théorème de la puissance/l'énergie cinétique

On obtient le théorème de l'énergie cinétique à partir du principe fondamental de la dynamique appliqué, dans un référentiel galiléen, à un système fermé de masse m :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (3.5)$$

en prenant le produit scalaire avec la vitesse \vec{v} du point M , et comme $\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt = d(v^2/2)/dt$, on a

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \quad (3.6)$$

C'est le THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE : la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance des forces s'exerçant sur ce point.

On peut ensuite intégrer cette identité sur une trajectoire allant d'un point A (position de M à $t = t_A$) jusqu'à un point B (position de M à $t = t_B$)

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_c}{dt} dt = \int_A^B dE_c = \sum \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (3.7)$$

soit finalement, comme $\vec{v} dt = d\vec{l}$,

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}) \quad (3.8)$$

C'est le THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE : la variation d'énergie cinétique d'un point matériel M le long d'un trajet est égale à la somme des travaux des forces exercées sur M au cours de ce trajet.

Remarque

Il faut noter que ces deux théorèmes incluent, dans leur membre de droite, *toutes* les forces exercées sur le point matériel ou le système étudié pendant le mouvement. Ils ne font aucune distinction entre les forces conservatives ou non-conservatives.

3.3.2 Théorème de l'énergie mécanique

Supposons maintenant que le point matériel étudié est uniquement soumis à des forces conservatives. On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_{AB}(\vec{F}) = \sum -\Delta E_p \Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_m = 0 \quad (3.9)$$

C'est le THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE : l'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives est conservée au cours du temps.

Notons enfin deux points qui découlent de ce théorème :

- Si le point matériel subit des forces non-conservatives dont la résultante est \vec{F}_{nc} on devra corriger le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = W_{AB}(\vec{F}_{nc}).$$

- Aussi, de même qu'il y a un théorème de l'énergie cinétique et un théorème de la puissance cinétique, il y a un théorème de l'énergie mécanique et un théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}).$$

Exercice n°22 : Retour sur le pendule simple

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple à l'aide de considérations énergétiques.

Correction n°22 : Retour sur le pendule simple

L'énergie cinétique du pendule simple vaut

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

Le poids est une force conservative et l'énergie potentielle de pesanteur vaut

$$E_{pp} = mg(z - z_0) = mgl(1 - \cos \theta).$$

La tension du fil, perpendiculaire au mouvement, ne travaille pas. L'énergie mécanique est donc conservée, et ainsi :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}.$$

Remarque

Insistons pour conclure sur le fait que ces quatre théorèmes sont en fait les mêmes simplement écrits dans des formes plus ou moins adaptées à telle ou telle situation : est-ce qu'il y a des forces non-conservatives ou pas ? Est-ce que j'ai intérêt à travailler en grandeur instantanée ou en grandeur intégrale ? De plus, ils ne sont pas indépendants du PFD, dont ils découlent.

Ainsi, on aura intérêt à appliquer un théorème énergétique lorsque le système étudié possède un unique degré de liberté puisqu'alors l'équation facilement obtenue suffira à résoudre le problème. De plus, si le PFD a été appliqué, aucun des quatre théorèmes énergétiques n'apportera d'information supplémentaire.

3.4 Équilibre et stabilité

3.4.1 Notion d'équilibre mécanique

Lorsqu'on étudie un système mécanique, on est souvent amené à se poser la question de sa ou ses position(s) d'équilibre. En effet, cette question est souvent plus simple que la résolution des équations du mouvement permettant d'obtenir toutes les trajectoires du système.

Souvent, c'est-à-dire lorsqu'on considère une source de dissipation (frottements), la position d'équilibre (si elle existe) correspond à la limite aux temps longs de la trajectoire de la particule.

Les positions d'équilibre d'un système correspondent à des situations où le système est pseudo-isolé : la somme des forces auxquelles il est soumis s'annule¹ En présence de forces uniquement conservatives, on va chercher les positions d'équilibre comme des points de l'espace où l'énergie potentielle est extrême :

$$x_{\text{eq}} \text{ position d'équilibre} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}(E)_p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \text{ en 1D.} \quad (3.10)$$

1. bien sûr, une telle situation peut se produire sans que le point soit immobile...

Remarque


Attention à bien faire la distinction entre *position d'équilibre* et *équilibre d'un système*. Pour qu'un système mécanique soit à l'équilibre il faut qu'il soit immobile et qu'il le reste. Autrement dit, il faut qu'il ait une vitesse nulle à l'instant initial et que son accélération soit nulle aussi ce qui, par le PFD, revient à être isolé ou pseudo-isolé. Une position d'équilibre ne remplit que cette seconde condition de sorte qu'on peut être en une position d'équilibre sans être soi-même l'équilibre. Il suffit d'être arrivé là avec une vitesse non nulle. En conclusion, un système est à l'équilibre mécanique s'il est placé en une position d'équilibre avec une vitesse initiale nulle.

3.4.2 Stabilité d'une position d'équilibre

Une fois la/les position(s) d'équilibre déterminée(s), il convient de se poser la question de leur stabilité.

Comment caractériser la stabilité d'un équilibre (mécanique ou non)? L'idée est simple : un système en équilibre stable reviendra à cet équilibre si on l'en écarte un peu. Au contraire, si l'équilibre est instable, une petite perturbation éloignera définitivement le système de cet équilibre.

Schématiquement, la situation est la suivante :



Stabilité des équilibre.

Remarque

Penser au cas d'une bille sur un saladier au sommet d'un saladier retourné ou dans le bon sens...

En conclusion, on retiendra :

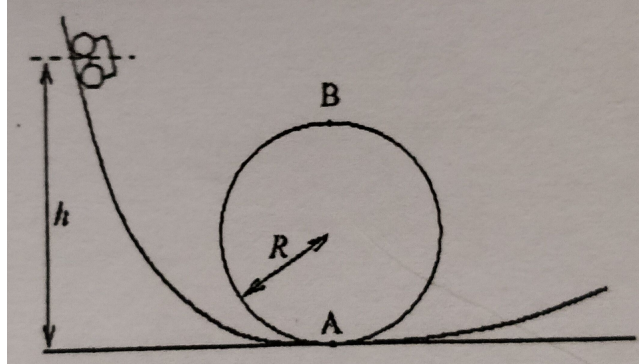
- Un équilibre est dit stable si E_p est minimale, i.e. $\partial^2 E_p / \partial x^2 > 0$
- Un équilibre est dit instable si E_p est maximale, i.e. $\partial^2 E_p / \partial x^2 < 0$

Une étude plus approfondie du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre est proposée dans le chapitre 5. Il faudra bien prêter attention au fait qu'ici la dérivation de E_p se fait par rapport à l'espace et non par rapport au temps!

3.5 Exercices complémentaires

Exercice n°23 : Looping!

Un chariot roule sans frottement le long d'un rail faisant une boucle de rayon R comme représenté ci-dessous. On le lâche sans vitesse initiale d'une hauteur h .



1. Déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du chariot en un point du looping en fonction de θ .
2. Par application du PFD, déterminer l'expression de la réaction normale en fonction de θ .
3. Montrer que, à h fixée, la réaction est minimale en B. En déduire une condition sur h pour que la bille fasse un tour complet.
4. Si h est trop faible, donner l'expression de l'angle θ_{dec} où se fait le décollage de la bille.

Correction n°23 : Looping!

1. Entre le début de la chute et le bas du looping, en l'absence de frottement, on peut appliquer la conservation de l'énergie mécanique (on définit l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en A) :

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_p = -\Delta E_c \quad \text{donc} \quad -mgh = -\frac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{et} \quad v_A = \sqrt{2gh}.$$

Puis entre le point A et le point M repéré par l'angle θ , on a

$$E_m(A) = E_m(M) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_A^2 = mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2.$$

On en déduit

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R^2}(h - R(1 - \cos \theta))}.$$

2. On applique le PFD au point M dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et à la réaction du support qui se réduit à sa composante normale du fait de l'absence de frottements. De plus, on a vu en cinématique que dans ce cas d'un mouvement circulaire non uniforme l'accélération a deux composantes : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. Ainsi,

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

La première relation donne donc

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \frac{2mg}{R}(h - R) + 3mg \cos \theta.$$

3. Il est clair que si h et R sont fixés, la fonction $N(\theta)$ est minimale lorsque $\cos \theta$ l'est, donc en $\theta = \pi$.

Pour que la bille fasse un tour complet sans tomber, il faut donc que $N(\pi) > 0$, ce qui donne tous calculs faits

$$N = \frac{2mgh}{R} - 5mg > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{h}{R} > \frac{5}{2}}.$$

On remarque que pour faire le tour complet (sans frottement !) il suffit de partir un tout petit plus haut que le sommet de l'anneau.

4. Dans le cas où h est trop faible, on aura $N = 0$ dès lors que

$$\frac{2mg}{R}(h - R) + 3mg \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{h}{R} \right).$$

On note que, comme a priori $h/R > 1$, $\cos \theta < 0$ ce qui prouve que $\theta \in [\pi/2, \pi]$, qui est cohérent avec l'intuition physique.

Exercice n°24 : Voyage au centre de la Terre

On creuse entre deux points de la Terre A et B un tunnel rectiligne. La Terre est une sphère homogène de masse volumique ρ et de rayon R_T . Un train (point M de masse m) se déplace sans frottements dans ce tunnel sous la seule action de la force de Gravitation.

La masse de la Terre dépendant de la profondeur où l'on se trouve (cf. Électromagnétisme et théorème de Gauss), on admet que l'expression de cette force est $\vec{F} = -\frac{GmM(r)}{r^2} \vec{u}_r$, où r est la distance au centre de la Terre et $M(r)$ la masse contenue dans la sphère de rayon r .

1. Montrer que $\vec{F} = -mg \frac{r}{R_T} \vec{u}_r$.

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à cette force, d'abord en fonction de r puis de l'abscisse x du train dans le tunnel.

3. Déterminer l'équation du mouvement du train.

4. Quelle est la nature du mouvement ? Combien de temps faut-il pour aller de A à B ?

Correction n°24 : Voyage au centre de la Terre

Exercice n°25 : Pendule avec frottements

On considère la situation suivante : un pendule simple est placé sur un plan incliné d'un angle γ . Il est lâché d'un angle α , mais à cause de la présence de frottements ne remonte que d'un angle $\beta < \alpha$ de l'autre côté.

Déterminer le coefficient de frottement μ en fonction des angles du problème.

Correction n°25 : Pendule avec frottements

Bien qu'il y ait présence de frottements, on va utiliser un bilan d'énergie mécanique entre les deux positions extrêmes.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W(\vec{f})$$

La variation d'énergie cinétique, on passe de deux positions extrémales où la vitesse est nulle : $\Delta E_c = 0$.

Le calcul de l'énergie potentielle demande de faire attention aux angles. Il faut d'abord calculer la distance sur le plan incliné puis projeter par rapport à la verticale. Les distances le long de la ligne de plus grande pente valent respectivement $l(1 - \cos \alpha)$ et $l(1 - \cos \beta)$. Pour projeter sur la verticale pour obtenir des altitudes, on multiplie par $\sin \gamma$ (si $\gamma = 0$ on est à plat donc pas d'énergie de pesanteur, si $\gamma = \pi/2$ on est vertical et il s'agit

du calcul habituel pour le pendule simple). On en déduit donc

$$\Delta E_p = mgl(1 - \cos \beta) \sin \gamma - mgl(1 - \cos \alpha) \sin \gamma = mgl(\cos \alpha - \cos \beta) \sin \gamma$$

on vérifie rapidement que comme $\beta < \alpha$, on a bien $\Delta E_p < 0$ qui correspond bien au fait que le point est plus bas en altitude.

En ce qui concerne le frottement, il y a glissement donc $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\|$. Par ailleurs, N équilibre le poids projeté selon $-mg \cos \alpha$. On a donc $T = \mu mg \cos \gamma$, opposé à la vitesse. Le travail effectué vaut donc

$$W(\vec{T}) = \int_{\alpha}^{\beta} -\mu mg \cos \gamma \, dl = -\mu mg \cos \gamma \int_{\alpha}^{\beta} dl = -\mu mgl(\alpha + \beta) \cos \gamma$$

car le chemin parcouru sur un arc de cercle vaut $\alpha + \beta$.

Finalement, le théorème de l'énergie mécanique donne

$$mgl(\cos \alpha - \cos \beta) \sin \gamma = -\mu mgl(\alpha + \beta) \cos \gamma \Rightarrow \mu = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\alpha + \beta} \tan \gamma$$

Cohérence de la formule : $\beta < \alpha$ donc $\cos \beta > \cos \alpha$.

Exercice n°26 : Distance d'arrêt d'une voiture

Une voiture roulant à 50 km/h a besoin de 40 m pour s'arrêter. On ne considère que les frottements solides entre elle et le sol. De quelle distance d'arrêt aura-t-elle besoin à 80 km/h ?

Correction n°26 : Distance d'arrêt d'une voiture

On sait peu de chose des frottements solides si ce n'est que lorsqu'il y a glissement, ils sont constant. Ainsi s'il faut 40 m pour dissiper l'énergie d'une voiture roulant 50 km · h⁻¹ il faudra une distance proportionnelle pour dissiper l'énergie d'une voiture roulant à 80 km · h⁻¹. Or

$$\frac{E_c(80)}{E_c(50)} = \frac{80^2}{50^2} = 2.56.$$

La vitesse étant multipliée par 1,6, la distance d'arrêt sera, elle multipliée par $1.6^2 = 2.56$ du fait du carré sur v dans l'énergie cinétique. La voiture roulant à 80 km · h⁻¹ s'arrêtera donc au bout de 102,4 m.

Chapitre 4

Moment cinétique

4.1 Définitions

4.1.1 Nécessité

Pourquoi définir une autre quantité que la quantité de mouvement ? Après tout, celle-ci permet, via le principe fondamental de la dynamique, de décrire les équations horaires de n'importe quel point matériel.

Cependant, sur le cas du mouvement circulaire, on sent que cette description est peu adaptée. En effet, dans le cas de ce mouvement plutôt symétrique, la quantité de mouvement change de direction en permanence, et la description est donc peu pratique. On voudrait donc définir une quantité à même de dire « le système tourne », un peu comme la quantité de mouvement dit « le système se translate ».

4.1.2 Moment cinétique d'un point matériel

Par rapport à un point Soit O un point fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} galiléen. Le MOMENT CINÉTIQUE du point M dans \mathcal{R} est défini par :

$$\vec{L}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}. \quad (4.1)$$

Il s'agit bien entendu d'une notion qui dépend du référentiel \mathcal{R} , mais aussi du point par rapport auquel on le calcule. Dans toute la suite on se cantonne au cas, qui est le seul intéressant, où le point de calcul est fixe dans le référentiel d'étude.

Remarque

Par propriété du produit vectoriel le moment cinétique est d'autant plus grand que les vecteurs \vec{r} et \vec{v} sont orthogonaux et exactement nul lorsqu'ils sont colinéaires. Cela traduit bien ce que l'on voulait : \vec{L} est nul pour une translation et maximal pour une rotation.

Par rapport à un axe Soit un axe Δ (porté par un vecteur unitaire \vec{e}_Δ) passant par le point O . Le moment cinétique du point M selon Δ vaut

$$L_\Delta = \vec{L}_O(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\Delta. \quad (4.2)$$

Remarque

Le calcul de L_Δ ne dépend pas du point choisi pour calculer le moment cinétique.

4.2 Théorème du moment cinétique

De la même manière que le moment cinétique traduit la rotation comme la quantité de mouvement traduit la translation, il nous faut un outil pour quantifier les actions qui « mettent en rotation » comme la force met en translation. Le théorème du moment cinétique sera alors équivalent du PFD pour la rotation.

4.2.1 Moment d'une force

On appelle MOMENT D'UNE FORCE \vec{F} agissant sur un point matériel M par rapport au point O (fixe dans \mathcal{R}) la quantité

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}}. \quad (4.3)$$

On définit de même le moment d'une force par rapport à l'axe Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\Delta$.

4.2.2 Théorème du moment cinétique

Partons de la définition $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ et dérivons :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{OM} \wedge \underbrace{\frac{dm\vec{v}}{dt}}_{\vec{F}} = \vec{\mathcal{M}}_O(M).$$

Finalement, on obtient le théorème du moment cinétique :

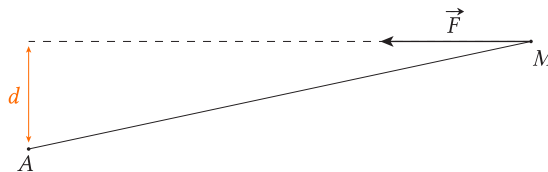
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}/\mathcal{R})}. \quad (4.4)$$

Ce théorème extrait l'information suivante : pour faire tourner un point (lui donner du moment cinétique), il faut appliquer une force qui ait du moment. Pour un axe fixe Δ , on peut prendre le produit scalaire et obtenir le théorème du moment cinétique selon un axe

$$\frac{dL_\Delta(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}/\mathcal{R}). \quad (4.5)$$

Exercice n°27 : Importance du bras de levier

Soit un point M que l'on cherche à mettre en rotation autour de A , fixe dans \mathcal{R} , par application d'une force \vec{F} . Le *bras de levier* est la distance d entre A et la droite portée par \vec{F} (voir schéma).



Montrer que le moyen le plus efficace de mettre M en rotation est de maximiser d . Interpréter, par exemple la position des poignées sur les portes.

Correction n°27 : Importance du bras de levier

On a

$$\vec{\mathcal{M}}_A(M) = \vec{AM} \wedge \vec{F} = AM \|\vec{F}\| \sin \theta \vec{u},$$

avec θ l'angle entre \vec{AM} et \vec{F} , et \vec{u} le vecteur unitaire normal au plan. Comme $AM \sin \theta = d$ on conclut

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(M) = \|\vec{F}\| d \vec{u}}.$$

Ainsi on maximise bien le moment de la force en augmentant d , ce qui, d'après le théorème du moment cinétique, est le meilleur moyen de mettre M en rotation.

On a donc intérêt, pour faire tourner un solide, à appliquer la force le plus loin possible de l'axe de rotation, et perpendiculairement à \vec{AM} . C'est généralement ce qu'on fait, notamment sur les portes.

Exercice n°28 : Encore (!) une méthode pour le pendule simple

Retrouver l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur l et masse m par application du théorème du moment cinétique.

Correction n°28 : Encore (!) une méthode pour le pendule simple

Dans un premier temps on exprime le moment cinétique du point matériel M constituant le pendule. Il est cohérent de se placer pour cela dans le repère polaire de centre O , point d'attache du pendule fixe dans le référentiel \mathcal{R} d'étude supposée galiléen. On a alors, le mouvement étant circulaire (mais non uniforme)

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = ml \vec{u}_r \wedge l \dot{\theta} \vec{u}_\theta = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_z.$$

Reste à calculer le moment des forces qui s'exercent, à savoir le poids et la tension du fil :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{T} \text{ est colinéaire à } \vec{OM}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= \vec{OM} \wedge \vec{P} = l \vec{u}_r \wedge mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle du pendule avec la verticale} \\ &= -lmg \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

En vertu du théorème du moment cinétique appliqué par rapport au point O ,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) \\ ml^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z &= -lmg \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{d'où en projection sur } \vec{u}_z, \quad \ddot{\theta} + \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \theta = 0$$

On reconnaît bien l'équation du mouvement du pendule simple, avec $\omega_0^2 = g/l$.

4.3 Moment cinétique d'un solide, énergie de rotation**4.3.1 Axe de rotation d'un solide**

Rappelons qu'un solide \mathcal{S} est défini comme un ensemble de points dont la distance les uns par rapport aux autres ne varie pas au cours du temps : $\forall P, Q \in \mathcal{S}, \|\vec{PQ}\| = \text{cste}$. Cette propriété permet de montrer l'existence d'un

axe privilégié du solide, appelé axe de rotation. On y associe alors un unique VECTEUR ROTATION $\vec{\Omega}$ tel que

$$\forall A, B \in S, \vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}.$$

Cette relation est communément appelée RELATION DE VARIGNON.

4.3.2 Lien entre rotation et moment cinétique

Pour un ensemble de points matériels (z représente l'axe Oz porté par \vec{u}_z) :

$$L_z = \sum_{M_i \in S} L_z(M_i) = \sum_{M_i \in S} (\overrightarrow{OM_i} \wedge m \vec{v}_i) \cdot \vec{u}_z \quad (4.6)$$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe il est judicieux de mener l'étude dans le repère cylindrique dont l'axe est l'axe de rotation du solide. On a alors $\overrightarrow{OM_i} = r_i \vec{u}_r$ et $\vec{v}_i = r_i \omega \vec{u}_\theta$ où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation. On a alors :

$$\vec{L} = \sum (r_i \vec{u}_r \wedge m_i r_i \omega \vec{u}_\theta) = \sum m_i r_i^2 \omega \vec{u}_z = \omega \sum m_i r_i^2 \vec{u}_z = J \omega \vec{u}_z.$$

avec $J = \sum_{M_i \in S} r_i^2 m_i$ le MOMENT D'INERTIE du solide autour de Oz . Par définition il est homogène à ML^2 et s'exprime communément en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

4.3.3 Énergie de rotation

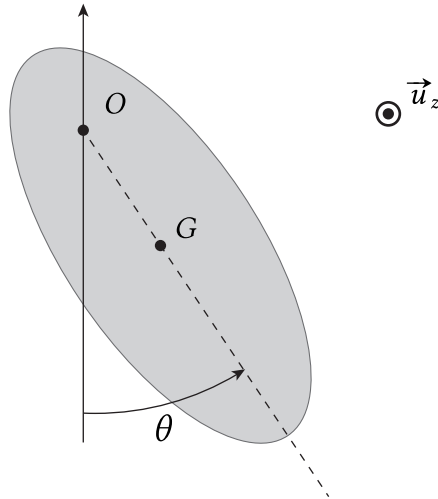
L'énergie cinétique de rotation propre d'un solide s'écrit alors :

$$E_{\text{rot}} = \sum_{M_i \in S} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{M_i \in S} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{M_i \in S} m_i r_i^2,$$

$$\text{d'où } E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Exercice n°29 : Étude du pendule pesant

On considère le pendule pesant de la figure suivante. À la différence du pendule simple on ne se place plus dans le modèle du point matériel mais on considère la rotation d'un solide.



On note I_Δ le moment d'inertie de ce pendule par rapport à l'axe de rotation $\Delta = Oz$. La liaison pivot en O est supposée parfaite. On note enfin $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = \dot{\theta} \vec{u}_z$ le vecteur vitesse angulaire du pendule, θ étant l'angle avec la verticale.

1. Trouver l'équation du mouvement par application du théorème du moment cinétique.
2. Retrouver l'équation du mouvement par des considérations énergétiques.
3. Linéariser l'équation du mouvement aux petits angles et déterminer la pulsation propre du système. Comment diffère-t-elle de celle du pendule simple ?

Correction n°29 : Étude du pendule pesant

1. Le moment cinétique du pendule par rapport à Δ est $L_\Delta = I_\Delta \Omega$. Le moment du poids par rapport à O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m \vec{g} = -mga \sin \theta \vec{u}_z \quad \text{où } a = OG.$$

Par définition d'une LIAISON PARFAITE le moment de la liaison en O est nul. Par application du théorème du moment cinétique par rapport à Δ on a finalement

$$I_\Delta \ddot{\theta} = -mga \sin \theta.$$

2. La liaison étant parfaite sa réaction ne travaille pas. Comme de plus le poids est conservatif, le théorème de l'énergie mécanique impose que E_m est constante. Or, $E_c = I_\Delta \dot{\theta}^2 / 2$ et $E_p = -mga \cos \theta$. On obtient l'équation du mouvement en dérivant l'énergie mécanique : $dE_m / dt = 0$.

3. Aux petits angles on peut linéariser le sinus en $\sin \theta \approx \theta$. L'équation du mouvement se ramène donc à

$$\ddot{\theta} = \frac{mga}{I_\Delta} \theta.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont la pulsation propre est $\omega_0^2 = mga / I_\Delta$. Pour rappel celle du pendule simple est $\omega_0^2 = g/l$ qui est cohérente puisque dans le cas du pendule simple, par définition de I_Δ , $I_\Delta = ma^2$. Ainsi, lorsqu'on veut prolonger les résultats du pendule pesant, qui est généralement le pendule réel utilisé en TP, on a intérêt à accumuler une grande masse en un point, et à équilibrer la tige (faire coïncider G à O).

4.4 Exercices complémentaires

Exercice n°30 : Bille dans une cuvette de potentiel

Calculer la période des oscillations effectuées par une bille de masse m au font d'une cuvette sphérique de centre O et de rayon R . On négligera les frottements et on supposera que l'amplitude des oscillations reste faible.

Correction n°30 : Bille dans une cuvette de potentiel

Cet exercice est parfaitement équivalent au pendule simple. On considère la bille de masse m dans la cuvette. Elle évolue à une distance constante R du centre O de la demi-sphère. On se place dans le cas où la bille est lâchée sans vitesse initiale (donc les oscillations se feront dans un plan unique), ce qui permet d'utiliser les coordonnées polaires sur une coupe de la sphère.

Moment cinétique en O :

$$\vec{L}_O(M) = R\vec{u}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Moment en O du poids :

$$\vec{M}_O(m\vec{g}) = R\vec{u}_r \wedge -mg\vec{u}_y = -mgR \underbrace{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_y}_{\sin\theta\vec{u}_z} = -mgR \sin\theta\vec{u}_z$$

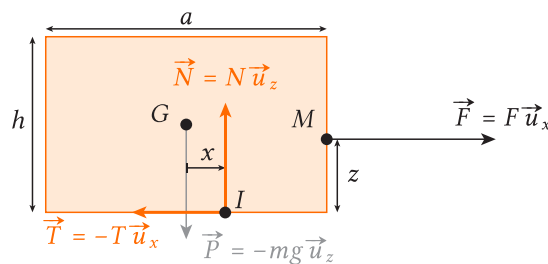
Et l'application du théorème du moment cinétique sur l'axe (Oz) donne alors

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin\theta = 0$$

En linéarisant pour les petites oscillations, $\sin\theta \sim \theta$ et on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique. La période des petites oscillations vaut donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Exercice n°31 : Basculement ou glissement d'un pavé ?

Considérons un pavé de côté a et hauteur h , de masse m , posé sur un plan et tiré dans la direction \vec{u}_x par une force $\vec{F} = F\vec{u}_x$ appliquée en M comme représenté figure suivante. Le frottement entre le pavé et le plan est caractérisé par un unique coefficient f .



Sur cette figure le point I d'application de la réaction du support est placé au hasard, nous en déterminerons la position plus bas.

- Glissement** : à quelle condition sur \vec{F} le pavé reste-t-il immobile ? Dans cette situation d'équilibre, exprimer N et T en fonction des paramètres du problème m , g et F .
- Point d'application de \vec{R}** : Écrire l'équilibre des moments au point I et en déduire l'expression de x en fonction de F , m , g et z . Interpréter l'expression trouvée.
- Basculement** : à quelle condition le solide bascule-t-il ? Comparer à la condition de glissement.

Correction n°31 : Basculement ou glissement d'un pavé ?

1. Le mouvement le plus classique est celui de GLISSEMENT : si la force F est suffisante, le solide glisse sur le plan : G a un mouvement de translation. Si au contraire la force F est trop faible, c'est-à-dire dans cette situation simple tant que $F \leq fmg$, le pavé reste immobile (on parle de NON-GLISSEMENT). Dans cette situation d'équilibre, la projection du PFD sur \vec{u}_x et \vec{u}_z donne :

$$N = mg \quad \text{et} \quad F = T.$$

2. l'équilibre des forces étant écrit, le point d'application I de la résultante de \vec{R} (commun à \vec{T} et \vec{N}) est obtenu en écrivant l'équilibre des moments des forces. Le point le plus adéquat est le point I , ce qui permet d'annuler $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{N}) = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{T}) = \vec{0}$. Il vient :

$$\vec{0} = \sum \vec{\mathcal{M}}_I = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{F}) = -(mgx - Fz) \vec{u}_y,$$

d'où la relation :

$$x = \frac{F}{mg} z.$$

L'équilibre des moments permet donc de trouver la position du point I auquel on peut ramener la force de réaction du support même si, bien sûr, les véritables forces de contact continuent à s'appliquer sur l'ensemble de la surface. Plusieurs remarques s'imposent sur cette expression de x :

- Si on ne tire pas sur le pavé ($F = 0$), le point I est la projection de G sur la surface de contact.
- Si on tire sur la droite du pavé, le point d'application de la force est à droite de G . Si on pousse ($F < 0$), le point d'application est à gauche de G .
- Plus le pavé est lourd, moins le point d'application s'écarte de la verticale de G .

3. Si $|x| > a/2$, le point d'application I sort de la surface de contact entre les deux solides ce qui est impossible pour l'application d'une force de contact. L'équilibre des moments est nécessairement rompu et le solide BASCULE. La condition de basculement s'écrit ainsi

$$\frac{|F|}{mg} z > \frac{a}{2} \quad \text{soit} \quad z > \frac{mga}{2|F|}.$$

Le basculement a lieu vers la droite si $x > a/2$ — soit $F > 0$ — et vers la gauche si $x < -a/2$ — soit $F < 0$. Cette condition est d'autant plus difficile à remplir que le pavé est large (a grand) et lourd (m élevée).

Pour avoir $F = T$ alors que le pavé est immobile, on doit avoir $|F| \leq fN$. Si la force F dépasse cette limite, on aura alors glissement au lieu du basculement.

